

Table des matières

I Comprendre (m45)	15
1 Trigonométrie	17
1.0 Prérequis	18
1.1 Angles dans le cercle trigonométrique	19
1.2 sin, cos, tan d'un angle quelconque	22
1.3 Formule fondamentale et formule de <i>tan</i>	27
1.4 Formules des triangles quelconques	28
2 Fonctions	31
2.0 Prérequis	33
2.1 Caractéristiques d'une fonction	38
2.2 Variation et parité d'une fonction	49
2.3 Les sept fonctions de référence	55
2.4 Composées de fonctions de référence	62
2.5 Transformées de x^2	73
3 Deuxième degré	75
3.0 Prérequis	76
3.1 Fonctions du deuxième degré	78
3.2 Fonctions du deuxième degré, le retour	80
3.3 Équations et inéquations du deuxième degré	84
3.4 Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$	93
4 Statistique	95
4.0 Prérequis	96
4.1 Tableau brut - tableau ordonné	97
4.2 Diagrammes et graphiques	99
4.3 Indicateurs de position	101
4.4 Indicateurs de dispersion	103

5 Géométrie analytique plane	107
5.0 Prérequis	108
5.1 Points et vecteurs	111
5.2 Opérations sur les vecteurs	119
5.3 Équations d'une droite	129
5.4 Droites parallèles ou perpendiculaires	137
 II Comprendre (m54)	 145
1 Fonctions trigonométriques	147
1.0 Prérequis	147
1.1 Mesures d'un angle en radians	149
1.2 Angles associés	151
1.3 sin et cos de l'angle double	156
1.4 Les fonctions sin, cos et tan	157
1.5 Équations trigonométriques	161
 2 Limites de fonctions	 169
2.0 Prérequis	170
2.1 Limites de fonctions "en $+\infty$ "	171
2.2 Limites de fonctions "en $-\infty$ "	176
2.3 L'indétermination $\frac{\infty}{\infty}$	179
2.4 Limites de fonctions lorsque $x \rightarrow a$	179
2.5 Limites à gauche et à droite	185
2.6 Limites infinies lorsque $x \rightarrow a$	187
2.7 Synthèse $\lim_{x \rightarrow a}$	189
2.8 Fonctions discontinues	190
2.9 (*) Théorème des valeurs intermédiaires	191
 3 Dérivées, valeurs extrémales, graphiques	 193
3.0 Prérequis	193
3.1 A quoi sert la dérivée d'une fonction?	200
3.2 Sécantes et tangente	201
3.3 Dérivée des fonctions de référence	203
3.4 Dérivée et opérations	207
3.5 Dérivée et variation	210

3.6 Variation d'autres fonctions	211
3.7 Dérivée seconde	212

III Comprendre (m64) 215

1 Fonctions Réciproques 217	217
1.0 Prérequis	217
1.1 Relation réciproque	218
1.2 Exercices	221
2 Exponentielles et Logarithmes 223	223
2.0 Prérequis	223
2.1 Exponentielles de base quelconque	227
2.1.1 Exercice	227
2.1.2 Théorème de fondation	228
2.2 Exponentielle népérienne	232
2.3 Logarithmes de base quelconque	234
2.4 Logarithme népérien	237
2.5 Quelques applications particulières des logarithmes et exponen- tielles	240
3 Calcul Intégral 243	243
3.1 Prérequis	244
3.2 Calcul numérique d'une intégrale	244
3.3 Intégrale d'une fonction continue dans $[a;b]$	247
3.4 Primitive d'une fonction	248
3.5 Primitives immédiates	250
3.6 Primitivation par substitution	252
3.7 Primitivation par parties	253
3.8 Exercice récapitulatif	254
3.9 Calcul d'intégrales à l'aide de primitives	255
4 Géométrie et Algèbre 257	257
4.0 Prérequis	258
4.1 Points et vecteurs	260
4.1.1 Point de l'espace	260
4.1.2 Distance entre deux points	262

4.1.3 Vecteur de l'espace	262
4.1.4 Produit scalaire de deux vecteurs	266
4.1.5 Vecteurs orthogonaux	267
4.1.6 Exercices	268
4.2 Systèmes linéaires d'équations à trois inconnues	271

IV Retenir et appliquer (m45) 273

1 Trigonométrie	275
1.0 Prérequis	275
1.1 Angles dans le cercle trigonométrique	280
1.2 sin, cos, tan d'un angle quelconque	284
1.3 Formule fondamentale de la trigonométrie et formule de tan . .	288
2 Fonctions	291
2.0 Prérequis	291
2.1 Caractéristiques d'une fonction	303
2.2 Variation et parité	312
2.3 Les sept fonctions de référence	316
2.4 Transformées des fonctions de référence	317
2.5 Transformées de x^2	327
3 Deuxième degré	333
3.0 Prérequis	333
3.1 Fonction du deuxième degré	337
3.2 Fonction du deuxième degré, le retour	341
3.3 Équations et inéquations	344
3.4 Factorisation du trinôme	360
4 Statistique	363
4.1 Prérequis	363
4.2 Tableau brut - tableau ordonné	364
4.3 Diagrammes et graphiques	366
4.4 Indicateurs de position	367
4.5 Indicateurs de dispersion	368

5 Géométrie analytique plane	371
5.0 Prérequis	371
5.1 Points et vecteurs	374
5.2 Opérations sur les vecteurs	377
5.3 Équations d'une droite	384
5.4 Droites parallèles ou perpendiculaires	391
 V Retenir et appliquer (m54)	 395
1 Fonctions trigonométriques	397
1.0 Prérequis	397
1.1 Mesures d'un angle en radians	404
1.2 Angles associés	407
1.3 sin et cos de l'angle double	410
1.4 Les fonctions sin, cos, tan	411
1.5 Équations trigonométriques	414
 2 Limites de fonctions	 425
2.0 Prérequis	425
2.1 Limites de fonctions en $+\infty$	429
2.2 Limites de fonctions en $-\infty$	432
2.3 L'indétermination $\frac{\infty}{\infty}$	434
2.4 Limites de fonctions lorsque $x \rightarrow a$	435
2.5 Limites à gauche et à droite	437
2.6 Limites infinies lorsque $x \rightarrow a$	437
2.7 Synthèse $\lim_{x \rightarrow a}$	440
2.8 Fonctions discontinues	440
2.9 Théorème des valeurs intermédiaires	441
 3 Dérivées, valeurs extrémales, graphiques	 443
3.0 Prérequis	443
3.1 A quoi sert la dérivée d'une fonction?	458
3.2 Sécantes et tangente	458
3.3 Dérivée des fonctions de référence	458
3.4 Dérivée et opérations	462
3.5 Dérivée et variation	465

3.6 Variation d'autres fonctions	466
3.7 Dérivée seconde	470

VI Retenir et appliquer (m64) 473

1 Fonctions Réciproques	475
1.0 Prérequis	475
1.1 Relation réciproque	479
1.2 Exercices	482
2 Exponentielles et Logarithmes	487
2.0 Prérequis	487
2.1 Exponentielles de base quelconque	497
2.2 Exponentielle népérienne	500
2.3 Logarithmes de base quelconque	502
2.4 Logarithme népérien	505
2.5 Quelques applications particulières des logarithmes	509
3 Calcul intégral	511
3.1 Prérequis	511
3.2 Calcul numérique d'une intégrale	514
3.3 Intégrale d'une fonction continue dans l'intervalle $[a;b]$	514
3.4 Primitive d'une fonction	516
3.5 Primitives immédiates	518
3.6 Primitivation par substitution	519
3.7 Primitivation par parties	520
3.8 Exercice récapitulatif	521
3.9 Calcul d'intégrales à l'aide de primitives	521
4 Géométrie et Algèbre	523
4.0 Prérequis	523
4.1 Points et vecteurs	524
4.2 Systèmes linéaires d'équations à trois inconnues	528

VII Annexes 531

1 Utilisation du cahier à spirale	533
--	------------

Avant-propos

Merci à tous ceux que j'ai côtoyé. Les professeurs, bien sûr, mais aussi les nombreux amateurs ou professionnels qui m'ont appris à mieux faire mon métier, à mieux communiquer et à mieux enseigner, sans oublier les élèves, éternelle source d'inspiration. Leurs idées, leurs remarques, leurs critiques, constructives ou acerbes, m'ont guidé au long de ces trente années de maturation.

Tétramath n'est pas un livre mais une méthode.

Pour l'expliquer, faisons un peu de philosophie.

Le vide est efficace, car comme le vide du soufflet peut produire du souffle à volonté, comme le moyeu d'une roue dont le vide permet de la faire tourner, comme le vase ou la maison, il est réceptacle.

Le cahier. Voilà le point central de cette méthode. Un bon cahier à spirale quadrillé.

Autour de ce cahier gravite ce cours, des exercices à correction dynamique sur le net et même l'utilisation du smartphone.

Tout ceci permet un apprentissage en présentiel, à distance, ou les deux.

Je te souhaite la réussite et le succès.

Une série de ressources gratuites ou libres de droit ont été utilisées.

Les logiciels livetex, lyx et luatex pour la rédaction, openboard, geogebra, google sheet, gimp, libreoffice, framindmap pour la conception des données. Tous sont des marques déposées de leurs propriétaires. Des ressources de <https://www.maths-et-tiques.fr/> ont également été utilisées.

De nombreuses illustrations sont issues de [freepik.com](https://www.freepik.com). Leurs auteurs sont [brgfx](#), [pikisuperstar](#), [iconicbestiary](#), [rawpixel](#), [fwstudio](#), [katemangostar](#), [kjpargeter](#), [asier_relampagoestudio](#), [macrovector](#). Qu'ils soient tous remerciés !

© Jean-Luc Goffin 2020, 2026

TétraMath, la méthode

Les 5 sens

Nous apprenons avec nos 5 sens : vue, toucher, goût, odorat et ouïe. L'idéal serait de les utiliser tous pour chacun de nos apprentissages. Dans le cadre de ce cours, nous allons utiliser la vue, l'ouïe et le toucher. Inutile d'expliquer la vue. L'odorat et le goût ne seront malheureusement pas utilisés ici.

L'ouïe

Tu as certainement un bon professeur de mathématiques. Écoute-le attentivement ! Il sera sans doute possible de lire ce texte écrit (text-to-speech) au départ de sa version électronique. Ces outils ne lisent pas encore bien les formules mathématiques.



Le toucher

Voici un sens très important. En utilisant à la fois la vue, l'ouïe et le toucher, nous facilitons notre mémoire. Pour utiliser le toucher, rien de plus facile.

Procure-toi un cahier à spirale quadrillé, de format A4 environ.

Pourquoi un cahier ? Parce que les feuilles sont reliées entre-elles. Le 2 juin, tu retrouveras facilement le cours du 17 février.

Pourquoi à spirale ? Parce qu'il est possible de retourner la page de gauche (ou de droite) sous les autres et le cahier occupe deux fois moins de place.

Si tu es droitier, écris uniquement sur les pages de droite pendant le cours ; tu écriras sur les pages de gauche en dehors du cours : préparations, synthèses, ... Les gauchers ont déjà compris qu'ils feront l'inverse. Des exemples de synthèse se trouvent en annexe.



Une petite histoire.

Pythagore (vers -540) a peut-être écrit le théorème qui porte son nom. Ce n'est pas du tout certain, car des cas particuliers de ce théorème étaient connus 1000 ans auparavant et, de plus, nous n'avons aucun écrit de Pythagore ! Bref, imaginer Pythagore écrire « son » théorème de gauche à droite et de haut en bas est une pure fiction !

Écris sur la page de droite comme tu veux : fais des ratures, barre, reviens en arrière (pas de 1000 ans) et surtout n'efface rien ! Laisse les erreurs sous les ratures pour ne plus les refaire. Tu veux un cours propre ? Utilise les pages de gauche... Utilise un stylo à 4 couleurs, un crayon et une gomme (rarement). Une règle et un compas pour reporter les mesures. Pour la calculatrice, demande à ton professeur. Je ne peux pas tout faire ! Je fais ce que je peux, et tu fais le reste !

PLR

La mise en page et la police ont été choisies pour faciliter l'accès aux personnes à lecture réduite.

C1 C2 C3

Les mentions C1, C2 et C3 signifient :

- **C1 Expliciter les savoirs et les procédures**

Tu seras capable de citer un énoncé, d'expliquer un concept et aussi maîtriser le vocabulaire, les tournures et le symbolisme nécessaires pour expliquer une propriété.

- **C2 Appliquer une procédure**

Tu devras acquérir des réflexes « réfléchis » pour résoudre un exercice. Il s'agit d'exercices rituels.

- **C3 Transférer**

Le but est de résoudre un problème en choisissant une bonne stratégie.

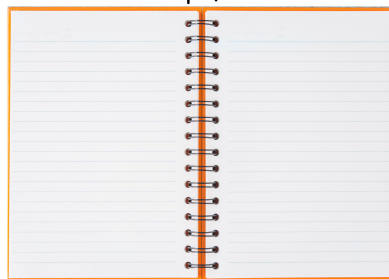
Support numérique

Tétramath est conçu pour les élèves 2.0 : Le cours comprend aussi des fichiers en ligne. Ceux-ci sont indiqués par une pastille verte :



[http ://tetramath.jean-luc-goffin.be](http://tetramath.jean-luc-goffin.be)

Une adresse donnant accès direct à chaque chapitre sera donnée au début de celui-ci.



tetramath, le livre

tetramath.jean-luc-goffin.com

partie I

Comprendre (m45)

Chapitre 1

Trigonométrie

Table des matières

1. Angles dans le cercle trigonométrique
2. $\sin$, $\cos$, $\tan$ d'un angle

3. Formule fondamentale et formule de $\tan$
4. Formules des triangles quelconques

Objectifs

CONNAÎTRE

- Représenter sur le cercle trigonométrique un point correspondant à un angle ainsi que ses nombres trigonométriques.
- Interpréter géométriquement les relations principales.

APPLIQUER

- Calculer les nombres trigonométriques d'un angle associé.
- Calculer la longueur d'un côté d'un triangle.

TRANSFÉRER

- Utiliser les relations trigonométriques pour traiter une application géométrique, topographique, physique, ...



En plus des outils de « Tétramath, la méthode », tu auras besoin d'un rapporteur (parfois tracé dans une équerre) et d'une calculatrice scientifique (pas pour l'examen).



<http://tetramath.jean-luc-goffin.be/trigonometrie>

1.0 Prérequis

1. Isole

C2

(a) R dans $U = R.I$

(b) v dans $d = v.t$

(c) r dans $S = \pi.r^2$

(d) r dans $V = \pi.r^2.h$

(e) y dans $t = \frac{x}{y}$

(f) x dans $3x - 4y = 5$

(g) y dans $x + 2y = 5$

(h) y dans $3x + 4y = 5$

(i) d dans $a^2 = b^2 + c^2 - 2bcd$

2. Soit le triangle ABC rectangle en B.

C2

Première série : un angle aigu et un côté sont donnés. Complète le tableau.

a	b	c	$\hat{A}$	$\hat{C}$
17 cm				36°
	13 cm		47°	
17 cm			17°	

3. Soit le triangle ABC rectangle en B.

C2

Deuxième série : deux côtés sont donnés. Complète le tableau.

a	b	c	$\hat{A}$	$\hat{C}$
3 cm		4 cm		
17 cm	20 cm			
	13 cm	10 cm		

4. (Ex 23) Le périmètre d'un losange vaut 80 m et l'amplitude d'un de ses angles vaut 60° .

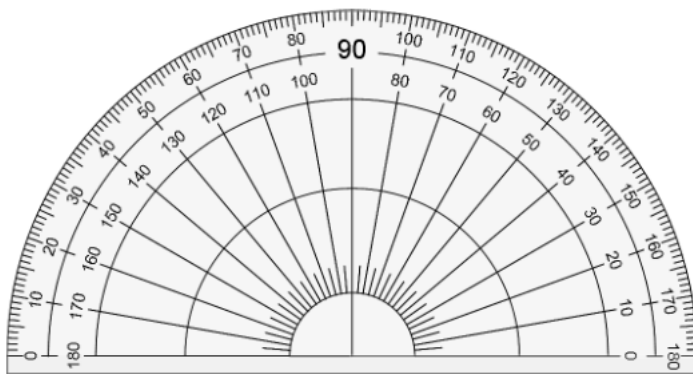
Que vaut l'aire définie par ce losange ?

5. (Ex 24) Un triangle rectangle définit une aire de $200\sqrt{3} \text{ cm}^2$ et un de ses angles a une amplitude de 30° .

Quelle est la longueur (en cm) de son hypoténuse ?

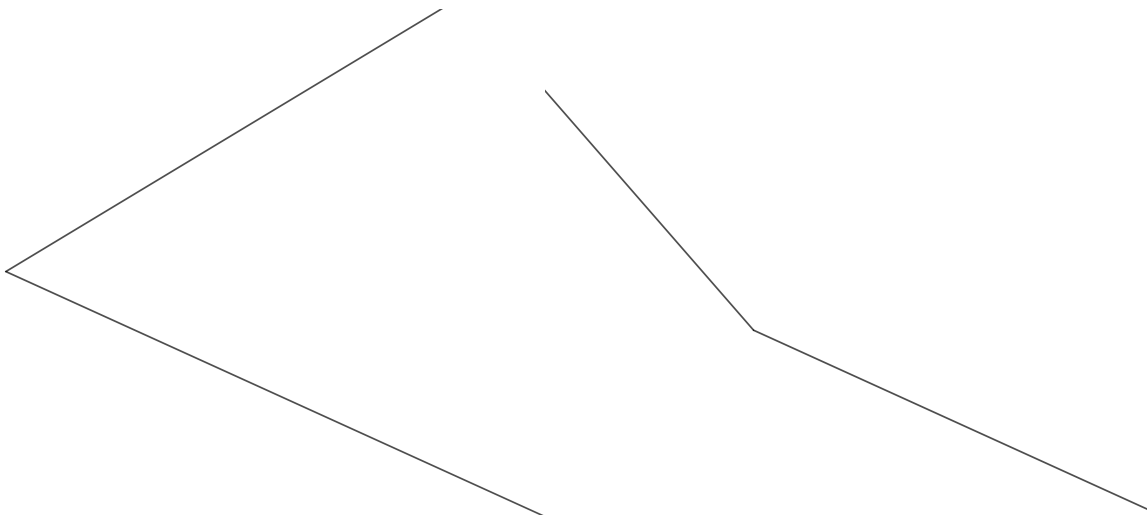
1.1 Angles dans le cercle trigonométrique

Incursion



Cet outil permet de mesurer des angles.

Mesure les angles ci-dessous.





<http://geogebra.org/classic/Fyet2ZpK>

1

Le cercle trigonométrique

Il existe des rapporteurs de toutes sortes : des petits, des grands, des mous...

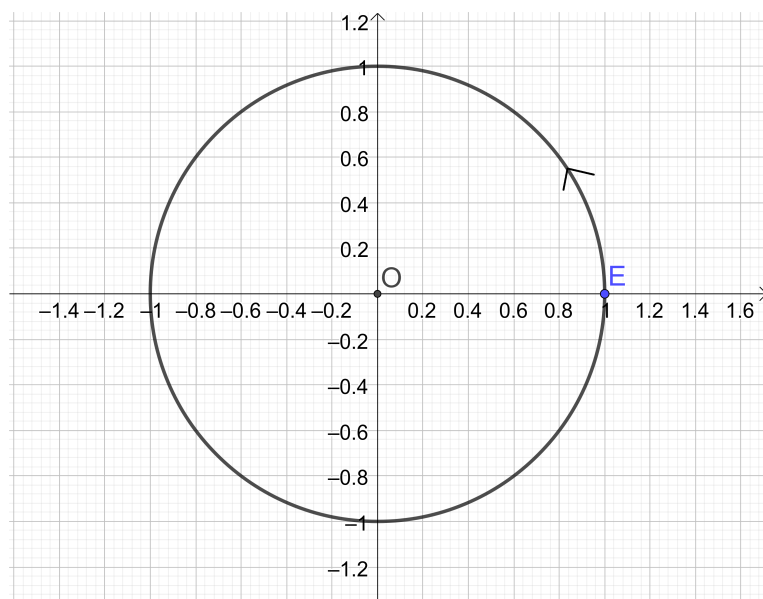
Mettons un peu d'ordre dans tout cela. Nous voulons un **rapporteur universel**.

Tout d'abord, ce sera un cercle complet, pas seulement un demi-cercle.

Ensuite, il devra être simple : centre $(0; 0)$ et rayon 1.

Enfin, il faudra mesurer d'une seule façon. La plupart des rapporteur ont deux origines (tu peux vérifier!).

Une seule origine $(1; 0)$ et comme c'est un cercle complet on précise le sens positif.



Il manque quelque chose sur ce rapporteur : les degrés!

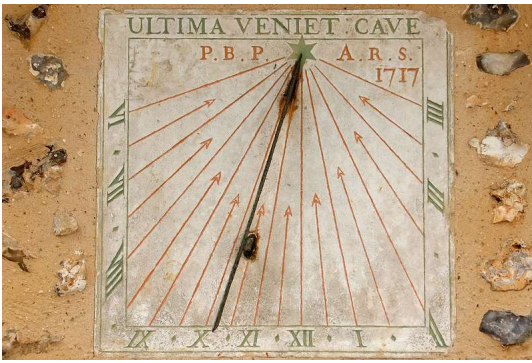
Je parie que ton rapporteur est transparent. Le problème est réglé!

Attention! Le 0° du rapporteur doit se trouver au point E.



Une petite question.

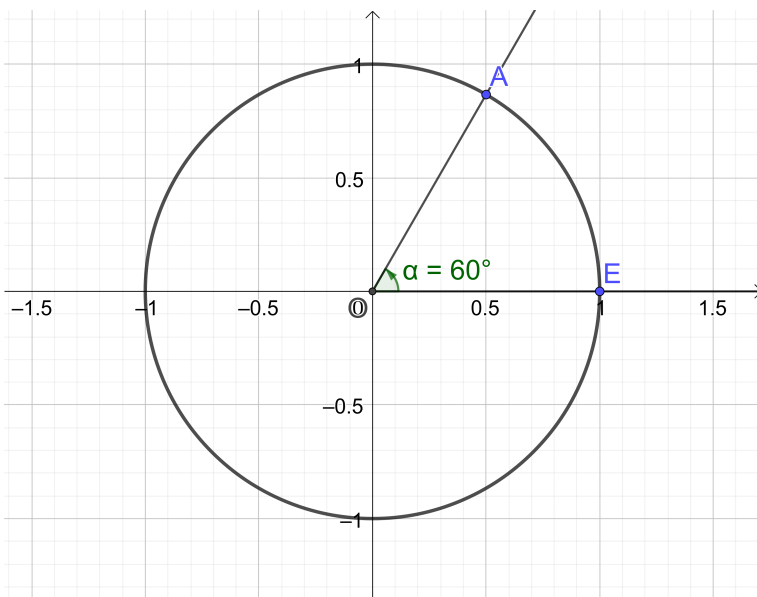
Le sens du cercle trigonométrique est celui des cadrans solaires. Tu le retrouves sur ce cadran solaire du 18^{ème} siècle. Alors, pourquoi les horloges tournent-elles dans l'autre sens? Mystère...



Mesures d'un angle orienté dans le cercle trigonométrique

Un angle orienté possède un côté origine et un côté extrémité.

Pour mesurer un angle orienté dans le cercle trigonométrique, il suffit de représenter son côté origine sur la demi-droite $[OE$ et le côté extrémité indique la mesure.



Vérifie avec ton rapporteur que l'angle $\widehat{EOA}$ mesure 60° .

Le point A représente l'angle α sur le cercle trigonométrique.



Rien ne t'oblige à marcher sur la flèche! Tant que tu pars de $[OE$ et que tu arrives sur $[OA$, c'est le même angle.

Ainsi, en tournant dans l'autre sens, tu obtiens -300° . C'est une autre mesure du même angle.

Cherches-en 3 autres mesures.

Exercices

1. Pour chacune des mesures d'angle suivantes
 - 1) indique le point sur le cercle trigonométrique
 - 2) détermine 2 mesures positives et 2 négatives de cet angle.
 - (a) -12°
 - (b) 150°
 - (c) -135°
 - (d) 320°
 - (e) 210°
2. Donne la mesure équivalente appartenant à l'intervalle $[0^\circ; 360^\circ[$.
 - (a) 1230°
 - (b) -510°
 - (c) 720°
 - (d) 1700°
 - (e) -910°

Mesures d'un angle non orienté dans le cercle trigonométrique

Les angles d'un triangle ou d'un polygone ne sont généralement pas orientés. Pour les représenter sur le cercle trigonométrique, il suffit de considérer que leur mesure est comprise entre 0° et 360° (angles orientés positivement).

1.2 sin, cos, tan d'un angle quelconque**Incursion**

Le cercle trigonométrique permet de représenter un angle (orienté) par un point.

C'est génial ! Essaye de mettre deux demi-droites de même origine dans ta poche...

Alors qu'un point, c'est l'objet le plus simple de la géométrie.

Examinons ce point d'un peu plus près.

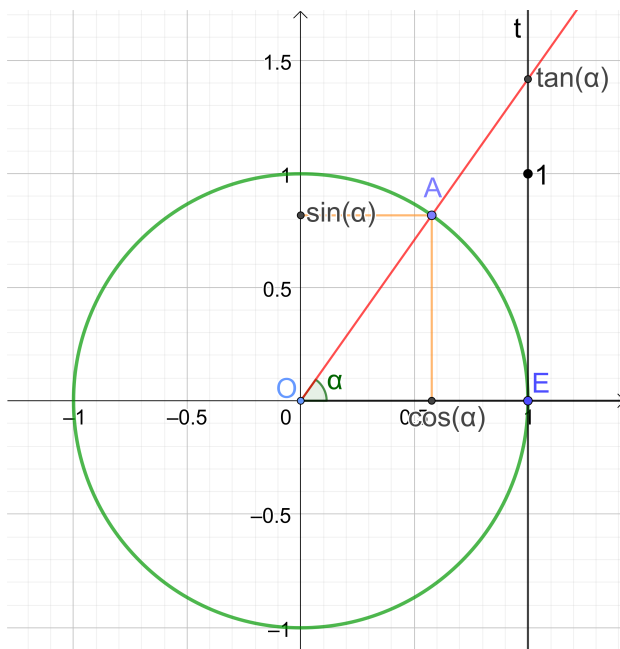
Grâce à notre repère ce point a deux coordonnées, abscisse (sur l'axe horizontal) et ordonnée (sur l'axe vertical).

C'est $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$.

C'est tout ? C'est tout !

Si A est l'unique point du cercle trigonométrique déterminé par l'angle orienté d'amplitude α , alors

- le sinus de α ($\sin \alpha$) est l'ordonnée du point A
- le cosinus de α ($\cos \alpha$) est l'abscisse du point A



Ajoutons à côté du cercle trigonométrique l'axe t , parallèle à l'axe vertical, passant par $(1, 0)$ et avec les mêmes graduations.

- la tangente de α ($\tan \alpha$) est la graduation sur l'axe des tangentes du point d'intersection avec la droite OA .

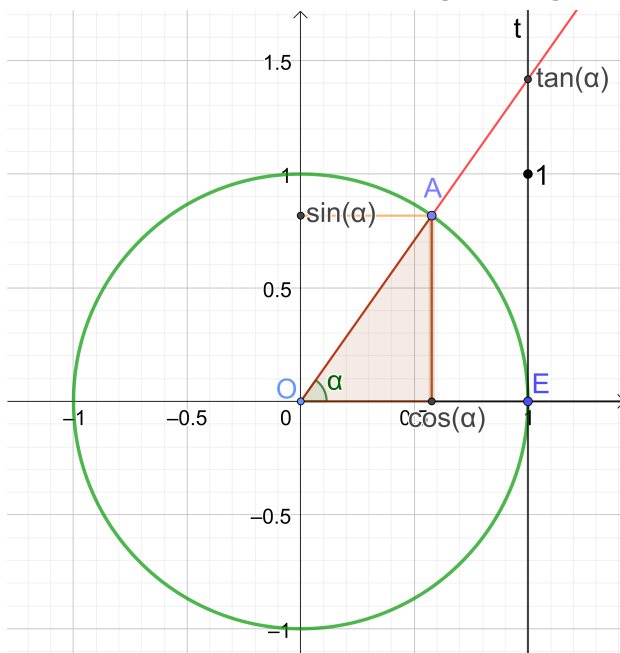


On a déjà vu une définition du sinus.
Y a-t-il deux sinus ?

Il n'y a qu'un seul sinus. L'ancien sinus ne s'applique qu'aux triangles rectangles et plus précisément aux angles aigus dans un triangle rectangle.

Le nouveau sinus s'applique à tous les angles.

Bien entendu, pour les angles aigus, c'est le même sinus. Voici pourquoi.



Dans le triangle rose, la vieille définition nous dit : $\sin \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$.

Or l'hypoténuse est un rayon du cercle trigonométrique et vaut donc 1.

Quant au côté opposé, nous pouvons le mesurer sur l'axe vertical.

Il y est compris entre la graduation $\sin \alpha$ de la nouvelle définition et 0.

C'est la distance à l'origine de $\sin \alpha$ et donc $|\sin \alpha|$.

Nous avons ainsi démontré que $\sin \alpha = \frac{|\sin \alpha|}{1}$ ou encore

$$\sin \alpha = |\sin \alpha|$$

où le sin de gauche est le vieux sin et le sin de droite est le nouveau sin.

En regardant l'axe vertical, tu vois que pour un angle aigu, $\sin \alpha > 0$ et donc

$$\sin \alpha = \sin \alpha$$

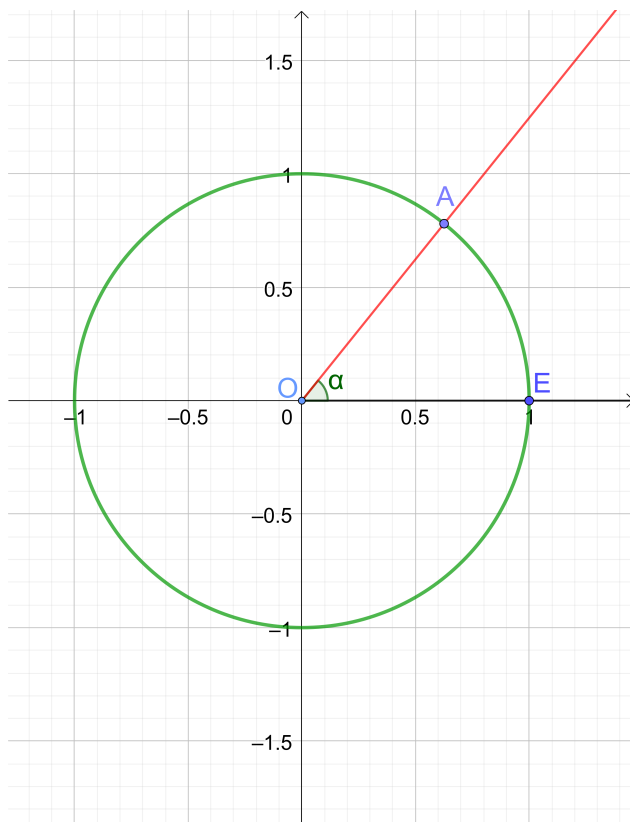
où le sin de gauche est le vieux sin et le sin de droite est le nouveau sin.

Le raisonnement est le même pour $\cos \alpha$.

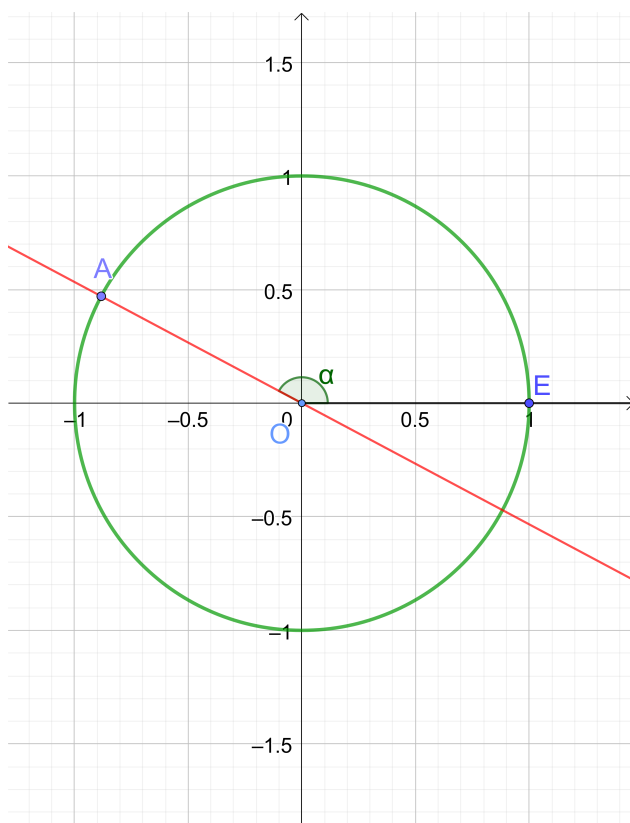
Pour $\tan \alpha$, les amateurs de triangles semblables y arriveront.

Exercices

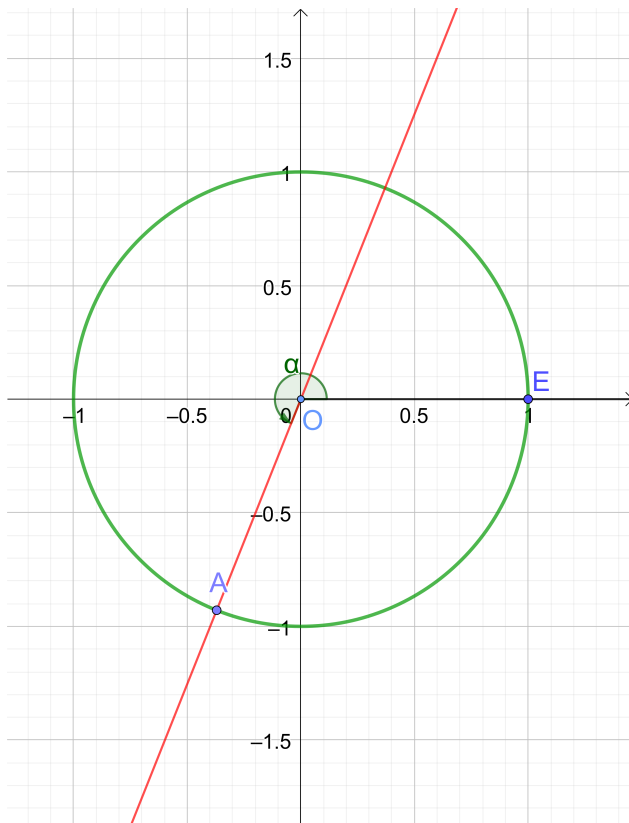
1. Représente le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle α dans les 4 situations suivantes puis donne-en une valeur approximative.



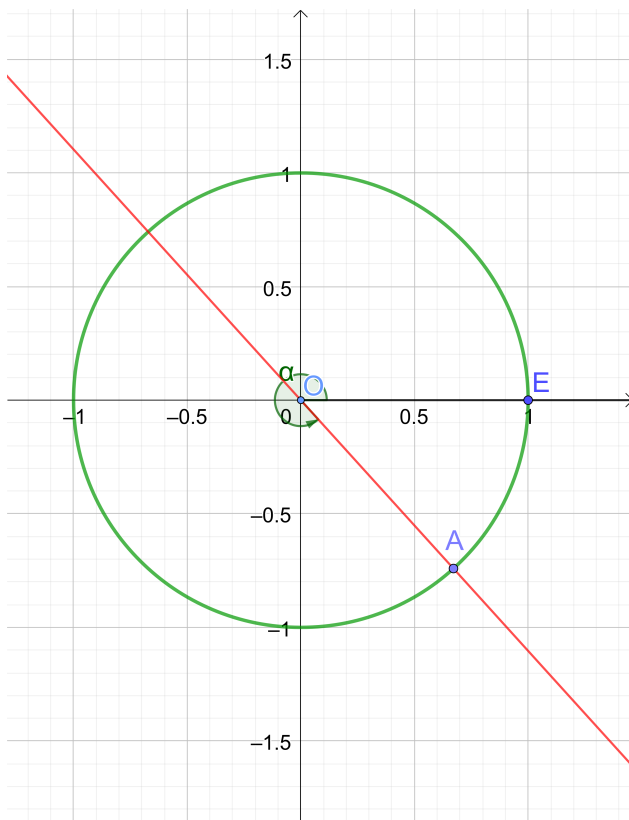
(a)



(b)



(c)



(d)

Valeurs remarquables

En se basant sur le cercle trigonométrique, complète les nombres trigonométriques suivants :

	0°	90°	180°	270°
sin				
cos				
tan				

Que constates-tu à la dernière ligne ?

$\tan 90^\circ$ et $\tan 270^\circ$ (ou $\tan(-90^\circ)$) n'existent pas !

En effet, la droite OA est parallèle à l'axe des tangentes.

1.3 Formule fondamentale et formule de $\tan$



Et la formule fondamentale
 $\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$?

Formule fondamentale de la trigonométrie

Quel que soit l'angle orienté dont une mesure est α ,

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Virons l'axe des tangentes !

Il est parfaitement possible de ne plus utiliser l'axe des tangentes grâce à

la formule $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

où α est une mesure d'un angle quelconque non droit.
(Pourquoi pas droit ?)

Exercice

Pour chaque mesure,

1. représente l'angle orienté sur le cercle trigonométrique,
 2. donne une approximation des nombres trigonométriques de cet angle (sin, cos, tan),
 3. vérifie que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
 4. vérifie que $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- (a) $\alpha = 110^\circ$
 (b) $\alpha = 246,12^\circ$
 (c) $\alpha = 49^\circ$
 (d) $\alpha = 131^\circ$

1.4 Formules des triangles quelconques



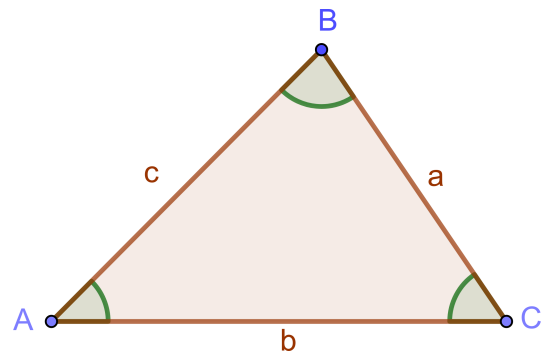
Dans un triangle quelconque, il n'y a pas d'hypoténuse.
 Nous allons donc dire adieu à la formule de Pythagore,
 mais d'abord à SOH - CAH - TOA.

Loi du cosinus (théorème de Pythagore généralisé)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c. \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c. \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b. \cos \hat{C}$$



Mais aussi

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

A la fin de ce chapitre, tu es capable de

CONNAÎTRE

- Représenter sur un cercle trigonométrique un point correspondant à un angle ainsi que ses nombres trigonométriques.
- Établir le lien entre triangles semblables et nombres trigonométriques.
- Interpréter géométriquement les relations principales.

TRANSFÉRER

- Utiliser les relations trigonométriques pour traiter une application de triangles rectangles.

Chapitre 2

Fonctions

Table des matières

1. Caractéristiques d'une fonction
2. Variation et parité
3. Les sept fonctions de référence

5. Transformées
de fonctions de référence
6. Transformées de x^2

Objectifs

CONNAÎTRE

- Tracer le graphique d'une fonction de référence.
- Associer un type de fonction de référence à une situation donnée.
- Interpréter graphiquement les définitions de croissance, décroissance, extremum, parité.

APPLIQUER

- Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires.
- Sur des cas simples de relations entre variables (par exemple $U = RI$, $d = vt$, $S = \pi r^2$, $V = abc$, $V = \pi r^2 h$), exprimer une variable en fonction des autres. Cas d'une relation du premier degré $ax + by = c$.
- Apparier des graphiques de transformées de fonctions de référence et des expressions analytiques et justifier.
- Trouver l'expression analytique d'une composée d'une fonction de référence à partir de son graphique.

- Tracer le graphique d'une composée d'une fonction de référence.
- Reconnaître si l'expression analytique ou le graphique est ou non une fonction
- Repérer sur base du graphique d'une fonction donnée, le domaine, l'ensemble-image, les zéros, l'ordonnée à l'origine, la parité, la croissance, les extrema (tableau de variations). Se servir du graphique pour répondre à des questions concernant certaines valeurs de la variable ou de ses images
- Déterminer par calcul le domaine, les zéros, l'ordonnée à l'origine et la parité d'une fonction



En plus des outils de « Tétramath, la méthode », tu auras besoin d'une calculatrice scientifique (pas pour l'examen).



[http ://tetramath.jean-luc-goffin.be/fonctions](http://tetramath.jean-luc-goffin.be/fonctions)

2.0 Prérequis

Puissances

1. Effectue. La réponse est un nombre.

$$\text{a } (-1)^3 = \quad (-2)^4 = \quad \left(-\frac{3}{2}\right)^{-4} =$$

$$\text{b } -1^3 = \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \quad (-4)^3 =$$

$$\text{c } -(-1)^3 = \quad -(-5)^3 = \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-6} =$$

$$\text{d } 1^{-3} = \quad (-3)^{-3} = \quad (-5)^4 =$$

$$\text{e } 4^{-2} = \quad \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} =$$

$$\text{f } -5^2 = \quad (-2)^{-1} = \quad \left(-\frac{3}{2}\right)^4 =$$

$$\text{g } (-5)^{-3} = \quad -3^2 = \quad (-4)^{-3} =$$

2. Écris à l'aide de puissances au numérateur uniquement

$$\text{a } \frac{x^3}{y^2} = \frac{x^3 y^{-4}}{z^{-2}} = \frac{x^{-3} z^2}{4y^2 z^{-4}} =$$

$$\text{b } \frac{x^4}{y^{-3}} = \frac{4x^{-3}}{y^2} = \frac{-x^3 y^{-1}}{-3z^{-4} y^2} =$$

$$\text{c } \frac{x^{-3}}{y^2} = -\frac{4x^{-3}}{3y^{-2}} = \frac{15(x^3 \cdot y^{-2})^{-1}}{45(y^2 z)^3} =$$

$$\text{d } \frac{x^{-5}}{y^{-3}} = \frac{x^3 z^{-3}}{5y^{-2}} = \frac{-45(x^3 z^{-4})^3}{18(y^2 z^{-1})^{-2}} =$$

3. Écris à l'aide de puissances à exposant positif

$$\text{a } x \cdot y^{-3} = \frac{2}{x^{-5}} = \frac{5x^{-1}}{15x^{-2}y^5} =$$

$$\text{b } 7x^2 \cdot y^{-3} = \frac{2y^2}{x^{-5}} = \left(\frac{-4x^{-1}}{12x^2y}\right)^2 =$$

$$\text{c } 2x^{-5} \cdot y = \frac{3y^{-3}}{x^{-5}} = \left(\frac{-4x^{-1}}{x^2y^{-5}}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$\text{d } -3x^{-2} \cdot y^{-3} = \frac{-4x^{-1}}{3x^2y^{-5}} = \left(\frac{3x^2}{y^3}\right)^{-4} \left(\frac{-4x^{-1}}{x^2y^{-3}}\right)^2 =$$

$a^2 - b^2$

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

4. Effectue

$$\begin{array}{ll} \text{a} & (x - 2) \cdot (x + 2) = (x - 2) \cdot (3x + 6) = \\ \text{b} & \left(\frac{a^2}{3} + \frac{2b}{5}\right) \cdot \left(\frac{a^2}{3} - \frac{2b}{5}\right) = (2 + \sqrt{5}) \cdot (2 - \sqrt{5}) = \\ \text{c} & (-5c + 2a) \cdot (2a + 5c) = (2\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \\ \text{d} & (3k - 2) \cdot (3k + 2) \cdot (9k^2 + 4) = (-\sqrt{6} - \sqrt{24}) \cdot (-\sqrt{6} + \sqrt{24}) = \end{array}$$

5. Factorise

$$\begin{array}{lll} \text{a} & 3xy + 3xz = & 5x^4 - 20x^2 = & x^4 - 16 = \\ \text{b} & 4a^2 - 25b^2 = & (2x + 3)^2 - 49 = & (2x + 3)^2 - (2x - 3)^2 \\ \text{c} & x^3 - 16x = & (x - 1)^2 - (2x - 3)^2 = & x^4 - (2x - 3)^2 = \end{array}$$

6. Chasse les radicaux du dénominateur

$$\begin{array}{lll} \text{a} & \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = & \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5} + 3} = & \frac{2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{5}} = \\ \text{b} & \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = & \frac{7}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = & \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \\ \text{c} & \frac{5 + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = & \frac{4\sqrt{5}}{3\sqrt{5} - 2} = & \frac{3\sqrt{2} + 3}{\sqrt{5}} = \\ \text{d} & \frac{5}{3 - \sqrt{2}} = & \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = & \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \end{array}$$

7. (Ex 22) On considère les nombres réels positifs a et b tels que $a^2 \geq b^2$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est égale à

$$\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} ?$$

- (a) $\sqrt{\frac{a + b}{2}}$
- (b) $\sqrt{a - \sqrt{b}}$
- (c) $\sqrt{a + \sqrt{b}}$
- (d) $\sqrt{\sqrt{a} - b}$

8. (Ex 24) On considère l'expression $\sqrt{\frac{a + b}{a - b}} + \sqrt{\frac{a - b}{a + b}}$.

Parmi les quatre expressions suivantes, quelle est celle qui est équivalente à celle donnée ci-dessus ?

(a) 1

(b) $\frac{2|a|}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

(c) $\frac{2|b|}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

(d) $\sqrt{2}\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}}$

9. Radicaux d'indice 2 ou 3

(a) Simplifie les radicaux.

(b) Effectue, si possible.

(c) Chasse les radicaux du dénominateur s'il y en a.

a	$\sqrt{162} =$	$\frac{\sqrt{120}}{\sqrt{10}} =$	$\frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{8} + 2\sqrt{18}} =$
b	$\sqrt{500} =$	$\frac{2 - \sqrt{6}}{\sqrt{3}} =$	$\frac{\sqrt{24} + 4\sqrt{2}}{\sqrt{32} - 2\sqrt{6}} =$
c	$6\sqrt{3} - \sqrt{27} =$	$\frac{3\sqrt{2} - 3\sqrt{20}}{\sqrt{54}} =$	$\sqrt[3]{32} =$
d	$\sqrt{8} - 4\sqrt{20} + 3\sqrt{27} - 2\sqrt{18}$	$4\sqrt{8} \cdot \sqrt{27} =$	$\sqrt[3]{-81} =$
e	$\sqrt{12} + 4\sqrt{20} - 3\sqrt{27} - 2\sqrt{45}$	$\sqrt{3} \cdot (\sqrt{12} - \sqrt{48} + \sqrt{81})$	$\sqrt[3]{54} =$
f	$\frac{2}{\sqrt{7}} + 3\sqrt{28} - \sqrt{63} =$	$(2\sqrt{5} - 3\sqrt{12}) \cdot (\sqrt{27} - 2\sqrt{24})$	$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250}$
g	$2\sqrt{28} + 6 \cdot \sqrt{\frac{7}{4}} + 14 \cdot \sqrt{\frac{1}{7}} =$	$(2 + \sqrt{8})^2 =$	$\sqrt[3]{0,008} =$
h	$\frac{7}{2\sqrt{5}} =$	$\frac{2\sqrt{32} - 3\sqrt{20}}{\sqrt{12}} =$	$2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} =$

Fonctions du premier degré

Complète les tableaux et représente les fonctions f et g (dans ton cahier).

x	f(x) = 2x + 6
0	
1	
2	
3	
-1	
-2	
-3	

x	g(x) = -3x + 7
0	
1	
2	
3	
-1	
-2	
-3	

Quelles sont les pentes de ces deux fonctions ?

Racine et signe

Détermine la racine de f en résolvant l'équation $f(x) = 0$.

Détermine la racine de g en résolvant l'équation $g(x) = 0$.

Dresse le tableau de signe de ces deux fonctions.



Pour une fonction du premier degré,
tout tourne autour de « m ».

Exercices

1. Trace la fonction et dresse son tableau de signe. Quelle est sa pente ?

(a) $f_1(x) = 2x + 1$

(b) $f_2(x) = -2x + 1$

(c) $f_3(x) = 3 - \frac{1}{2}x$

2. (Ex 21) Un gouvernement a prévu une aide A pour les cafés et restaurants fermés en raison de l'épidémie de la COVID-19. Cette aide comprend une part fixe F et une seconde part variable proportionnelle à la fois au revenu R déclaré pour l'année 2019 et au nombre total N d'heures payées à des travailleurs occupés par l'établissement en 2019. Décrire A à l'aide d'une formule.

3. (Ex 21) Une friterie vend son petit paquet de frites au prix de 2,5 euros et son grand paquet de frites au prix de 4 euros. Un habitué remarque que le grand paquet contient le double de frites par rapport au petit paquet.

De quel pourcentage le prix par frite du petit paquet est-il plus élevé (ou plus bas) que pour le grand paquet ?

4. (Ex 23) Auparavant, les honoraires pour un traitement chez un dentiste étaient de 50 euros. Le patient ne payait que 22 % de ces honoraires, le reste étant payé par l'assurance-maladie.

Les honoraires ont désormais augmenté de 10 %. Les assurances-maladie font en sorte que les patients paient toujours la même somme pour leur traitement qu'avant l'augmentation.

Quel est le pourcentage des nouveaux honoraires pris en charge par l'assurance-maladie ?

5. (Ex 25) Un hôpital emploie 2000 personnes soignantes. La répartition est : 50% infirmières, 25% médecins, 25% personnel psychosocial.

Le nombre d'infirmières est insuffisant. L'hôpital décide de remplacer 20% de son personnel psychosocial par des infirmières.

Quel pourcentage du personnel soignant seront des infirmières après ce changement ?

2.1 Caractéristiques d'une fonction

Incursion



Combien d'élèves de ton année connais-tu ?
Ceux de ta classe et les autres : 20, 50, 100 ?
Écris la date de naissance de chacun d'eux au format mmjj, par exemple 1210 pour le 10 décembre.

Comment organiser cela ?

Un petit (ou un grand) tableau convient parfaitement.

Fais-le sur la page de gauche de ton cahier.

Nom	Date de naissance
Jeanne	1109
Ludovic	0927
Aziz	0512
Hélène	
Leïla	
...	

En informatique, ce serait le début d'une base de données.

Dans tous les cas, cela s'appelle une **relation**.

Ce serait sympa de fêter les anniversaires.

Il suffit d'inverser les deux colonnes.

Date de naissance	Nom
1109	Jeanne
0927	Ludovic
0512	Aziz
	Hélène
	Leïla
	...

Fais-le dans l'ordre chronologique, comme ceci :

Date de naissance	Nom
...	...
0512	Aziz
...	...
0927	Ludovic
...	...
1109	Jeanne
...	...
	Hélène
...	...
	Leïla
...	...

Si tu connais 50 élèves de ton année, il est presque certain que deux d'entre eux ont leur anniversaire le même jour.

Date de naissance	Nom
...	...
0512	Aziz
...	...
0927	Ludovic
...	...
1109	Jeanne
1109	Camille
...	...
	Hélène
...	...
	Leïla
...	...

Il y a une différence essentielle entre le tableau des dates de naissance et celui des anniversaires.

Pour celui des dates de naissances, chacun a sa ligne : on parle de **fonction**.

Pour celui des anniversaires, une même date peut avoir plusieurs lignes : on parle de **relation** ordinaire (ou non-fonctionnelle).

Dans la suite du chapitre, nous n'allons plus utiliser de nom de personnes (ou de prénom) mais bien des nombres symbolisés par la variable x .

x	y
1	1109
2	0927
8	0512
-4	
3,14	
...	

Lorsque chaque x donne un seul y , la relation est une **fonction**.

Complète :

Une fonction est une relation pour laquelle

Exemples

1. La fonction f définie par $f(x) = -3x + 7$.

x	y=f(x)
1	4
3	-2
-1	10
0	7

2. La fonction f définie par $f(x) = x^2$.

x	y=f(x)
1	1
3	9
-1	1
0	0

3. La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.

x	y=f(x)
1	1
3	$\frac{1}{3}$
-1	-1
0	×

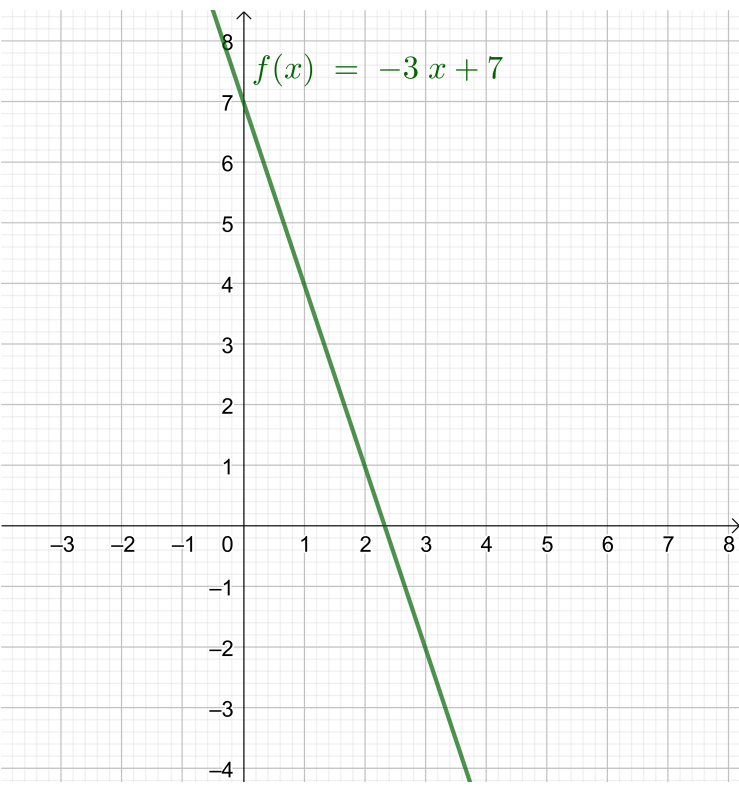
Le premier exemple est connu : c'est une fonction du premier degré.

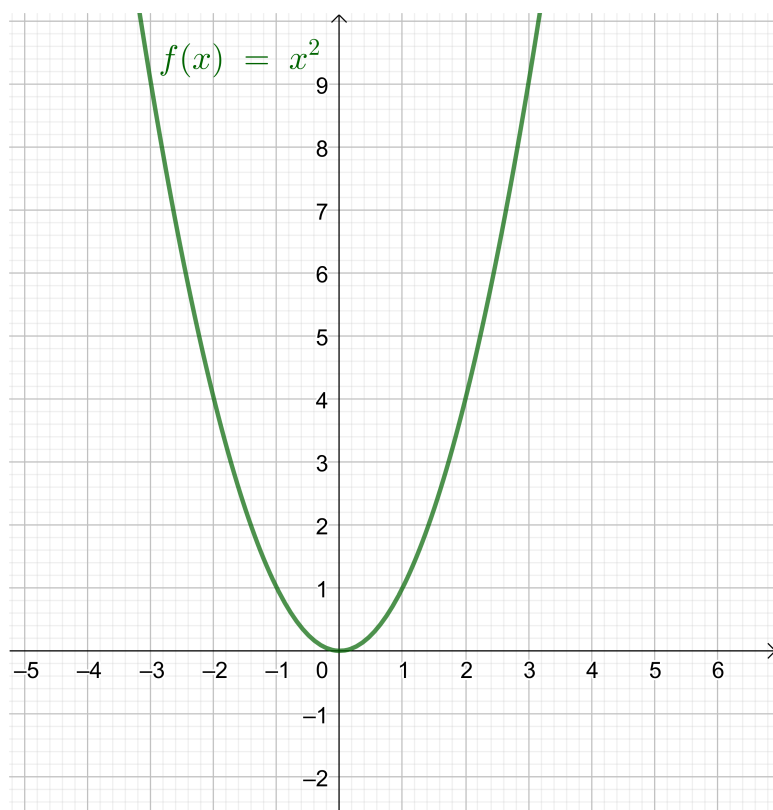
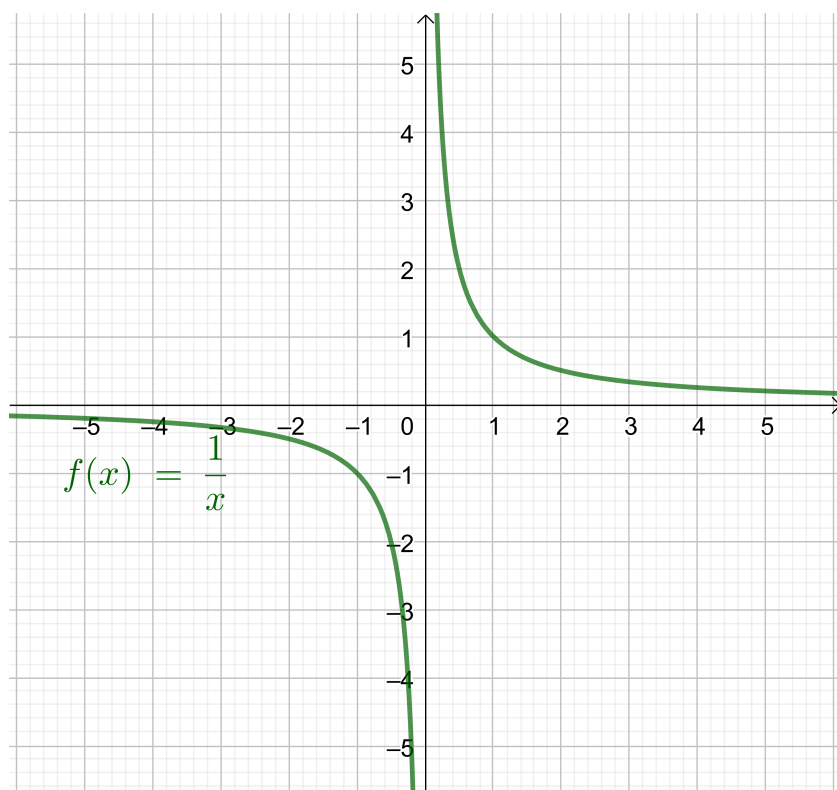
Dans le dernier exemple, $x=0$ n'a pas d'image. On dit que 0 n'appartient pas au domaine de la fonction f.

Le domaine des deux premiers exemples est $\mathbb{R}$.

La variable x est représentée sur l'axe horizontal, son image f(x) sur l'axe vertical.

Exemple 1



Exemple 2**Exemple 3**

Domaine et ensemble-image

Le domaine est l'ensemble des x de la fonction (condition d'existence).

L'ensemble-image en est l'ensemble des y .

Exemple 1

Le domaine est $\mathbb{R}$ (pas de condition d'existence).

L'ensemble-image est $\mathbb{R}$.

Exemple 2

Le domaine est $\mathbb{R}$ (pas de condition d'existence).

L'ensemble-image est $\mathbb{R}^+ = [0; \rightarrow[$.

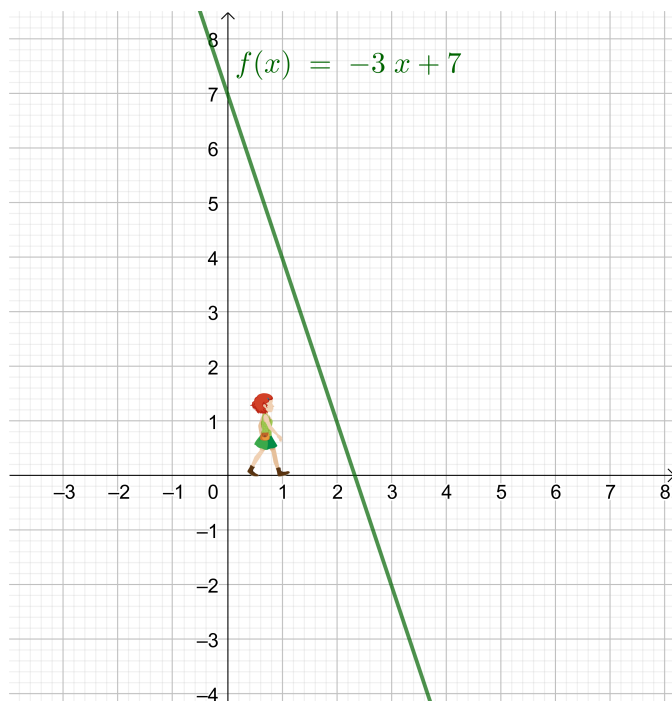
Exemple 3

Le domaine est $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Condition d'existence : $x \neq 0$).

L'ensemble-image est $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Racines et signe d'une fonction

Exemple 1



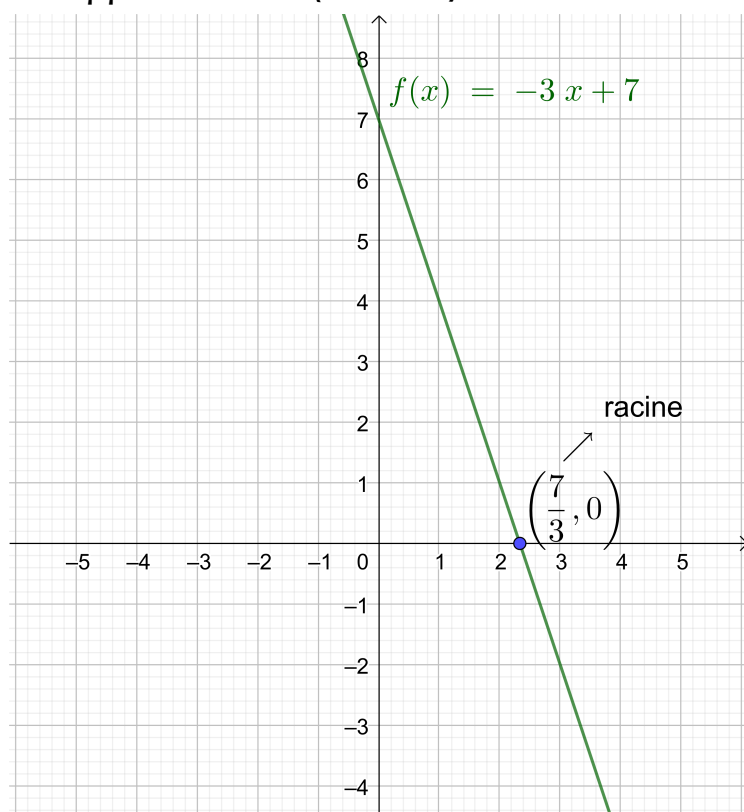
De gauche à droite,
l'image de x est positive, nulle
puis négative.
Il s'agit d'une fonction du pre-
mier degré où $m < 0$ car $m = -3$.

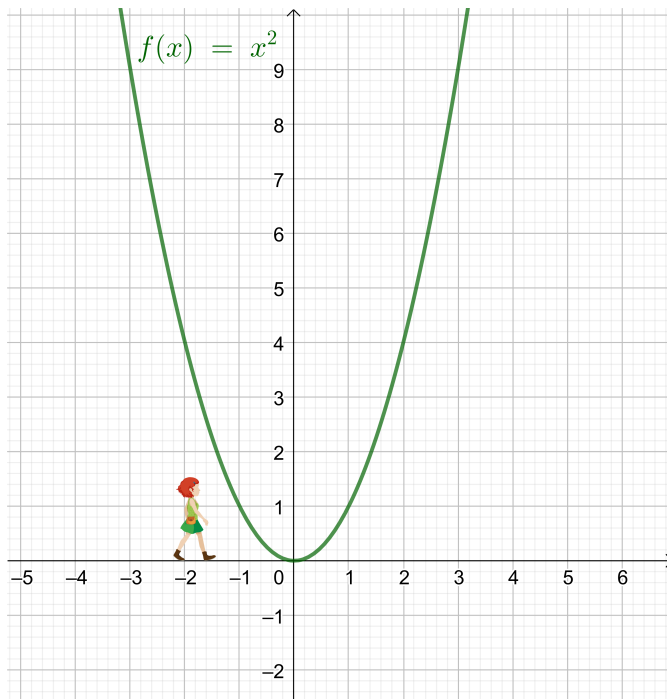
x		$\frac{7}{3}$	
y	+	0	-

$\frac{7}{3}$ est obtenu
en résolvant $-3x + 7 = 0$.

Définition

On appelle racine (ou zéro) d'une fonction tout x dont l'image par f est zéro.

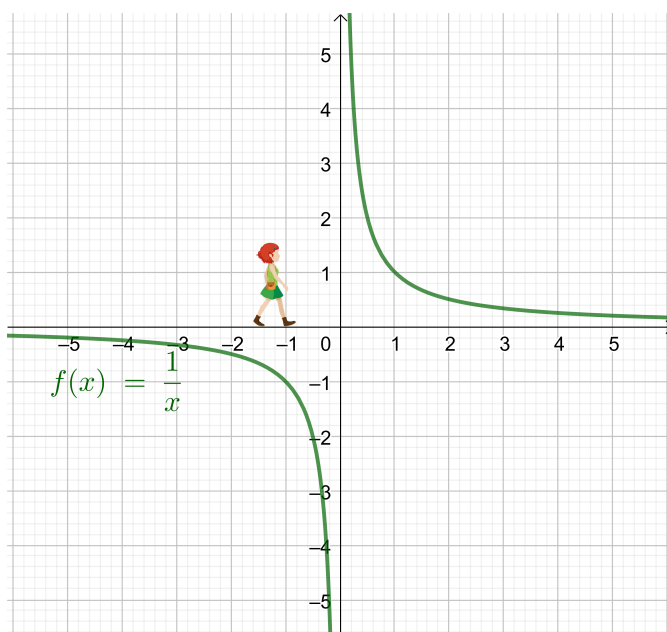


Exemple 2

De gauche à droite,
l'image de x est positive, nulle
puis encore positive.

x		0	
y	+	0	+

0 est la racine car $0^2 = 0$.

Exemple 3

De gauche à droite,
l'image de x est négative,
puis positive.

Attention à lever les pieds
en $x = 0$!

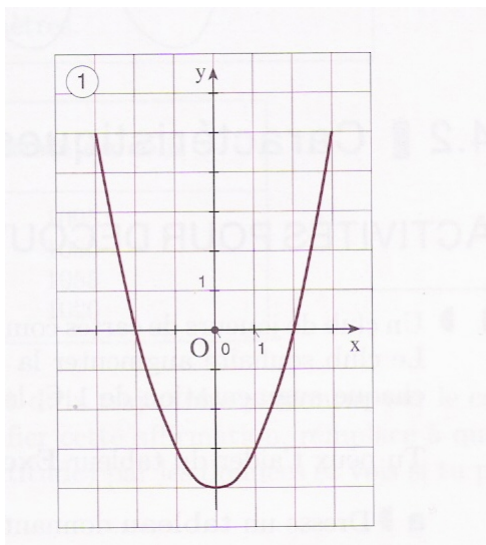
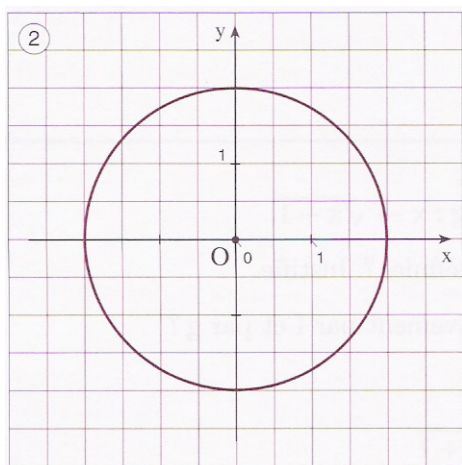
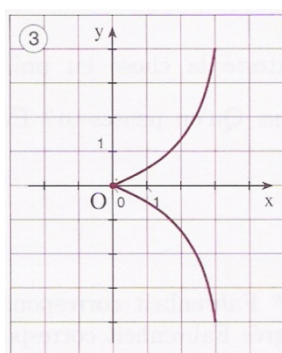
0 n'a pas d'image.

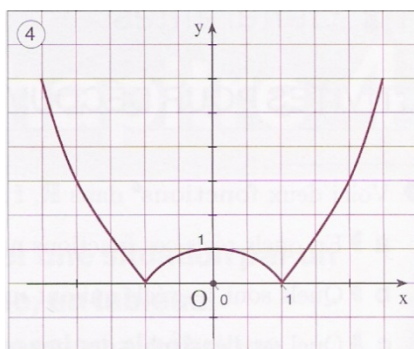
x		0	
y	-		+

Cette fonction
n'a pas de racine car $\frac{1}{x} \neq 0$.
Une fraction est nulle lorsque
son numérateur est nul.

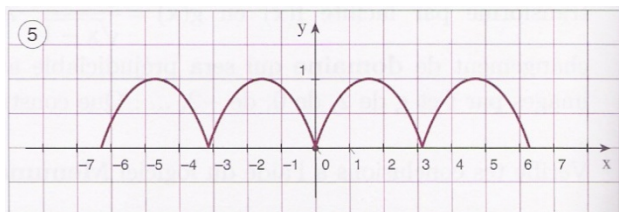
Exercices

1. Parmi les graphes suivants, quels sont ceux qui représentent une fonction numérique ? Donne alors son domaine et son ensemble-image.

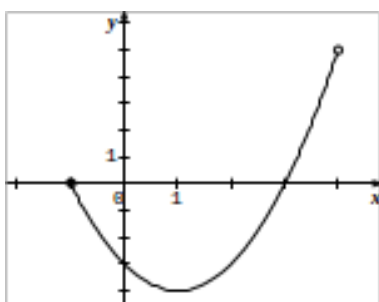




(d)



(e)



(f)

2. Détermine le domaine de

(a) $f(x) = \frac{x+3}{3x-1}$

(b) $f(x) = \sqrt{x-1}$

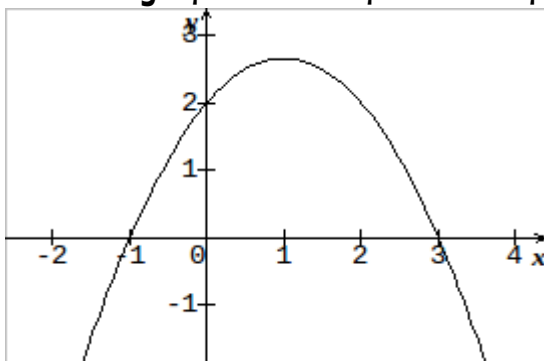
(c) $f(x) = \frac{3x-1}{x+3}$

(d) $f(x) = \sqrt{x+1}$

(e) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-9}$

3. Détermine le domaine et l'intersection avec les axes de coordonnées de la fonction f

(a) dont le graphe est représenté par



(b) telle que $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

$$(c) f(x) = x^3 - 3x$$

$$(d) f(x) = \frac{1}{3x}$$

$$(e) f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$(f) f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$$

$$(g) f(x) = \frac{1}{x^2-5x}$$

$$(h) f(x) = \frac{2}{7x-3}$$

$$(i) f(x) = \sqrt{1-2x}$$

$$(j) f(x) = \sqrt[3]{1-2x}$$

$$(k) f(x) = \frac{-x^2-9}{\sqrt{x+4}}$$

$$(l) f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{1-x}}$$

$$(m) f(x) = \frac{4x+2}{\sqrt{2x-3}}$$

$$(n) f(x) = \frac{x^2-2x}{\sqrt{x-1}}$$

$$(o) f(x) = \frac{x+1}{\sqrt[3]{1-x}}$$

$$(p) f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{x-1}$$

$$(q) f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{x^2-16}$$

$$(r) f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{x-2}$$

$$(s) f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{1-4x}}$$

$$(t) f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x-1}}$$

$$(u) f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x-1}}$$

4. Détermine le domaine, les intersections avec les axes et le tableau de signe de la fonction f . Trace ensuite son graphique.

$$(a) f(x) = 2x - 4$$

$$(b) f(x) = 6 - 4x$$

$$(c) f(x) = 5x + 2$$

$$(d) f(x) = -3x$$

2.2 Variation et parité d'une fonction

Variation

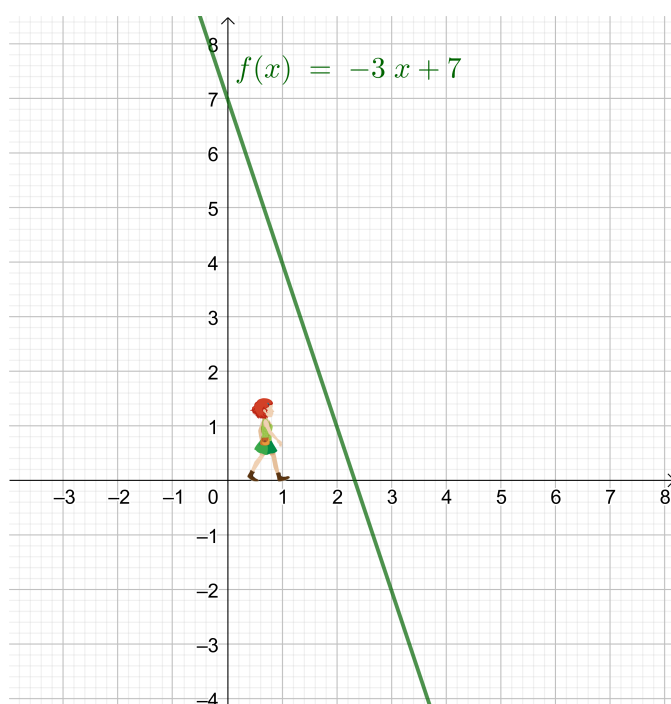


Une fonction du premier degré, ça monte tout le temps ou ça descend tout le temps.
Je veux bien, mais ça veut dire quoi « tout le temps » ?
Nous avons besoin d'une définition avec x et y
car une fonction relie x et y .

Fonction croissante : plus x est grand, plus y est grand.

Fonction décroissante : plus x est

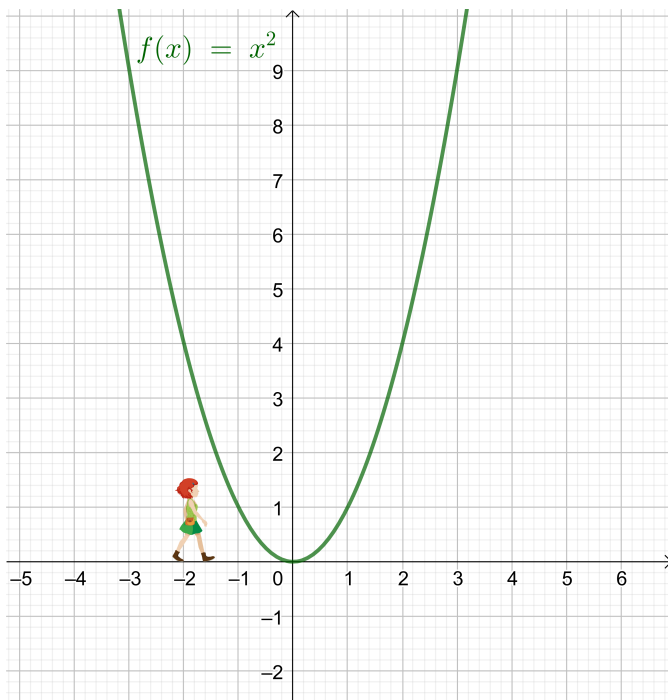
Exemple 1



Il s'agit d'une
fonction décroissante.

x	
y	$\searrow$

Exemple 2



De gauche à droite,
cette fonction est décrois-
sante
puis croissante.

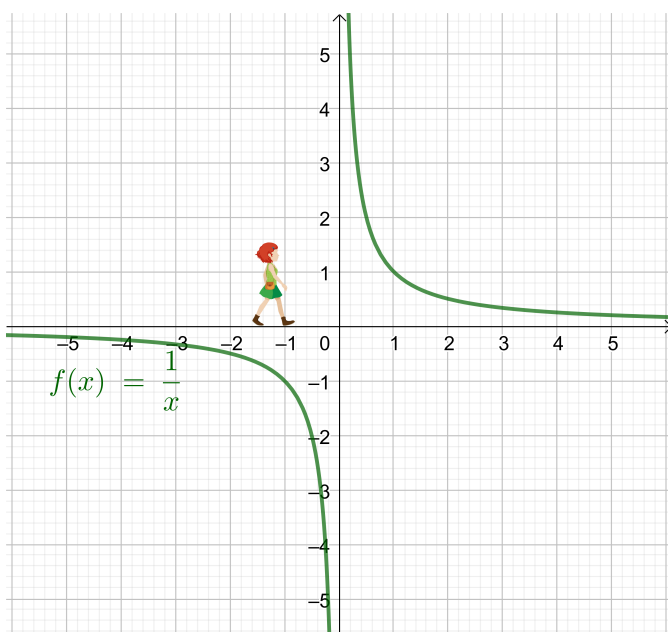
x		0	
y	↘	m	↗

Nous dirons que
0 est un minimum.

Définition

On appelle minimum d'une fonction un x qui a une image plus petite que ses voisins.

Exemple 3



De gauche à droite,
cette fonction
est décroissante,
puis décroissante!
Attention à lever les pieds
en $x = 0$!
0 n'a pas d'image.

x		0	
y	↘		↘

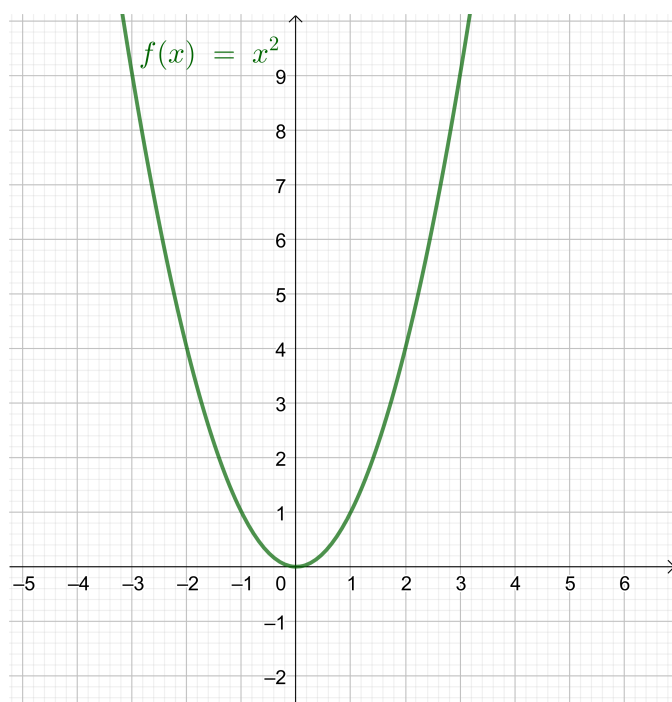
Parité



J'ai souvent envie de couper une fonction en deux.
Pas toi ?
Attention, c'est contagieux.
L'exemple 1, je ne vois pas comment le couper en deux.
Regardons les deux autres.

2

Exemple 2



Cette fonction est coupée en deux par l'axe vertical.

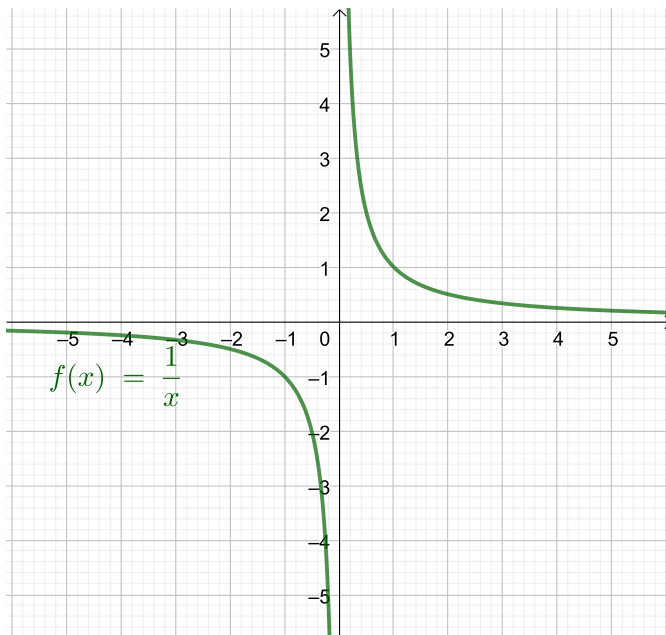
Qu'est-ce que cela veut dire ?

Cela veut dire que l'axe vertical est axe de symétrie :
 $f(-x) = f(x)$.

Définition

Lorsque $f(-x) = f(x)$ on dit que la fonction est **paire**.

Exemple 3



Avant de dire la même chose, remarque que l'axe vertical n'est pas axe de symétrie.

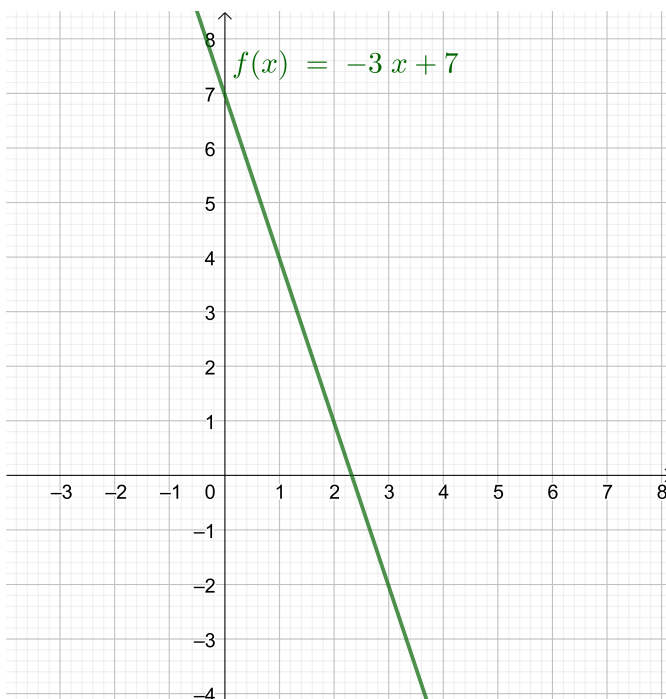
En fait, $f(-x) = -f(x)$.

$(0; 0)$ est centre de symétrie.

Définition

Lorsque $f(-x) = -f(x)$ on dit que la fonction est impaire.

Exemple 1



Cette fonction n'est ni paire, ni impaire.

$$f(-x) =$$

$$f(-x) = -($$

Il ne s'agit ni de $f(x)$
ni de $-f(x)$.

Exercices

1. Pour la fonction f ci-dessous,

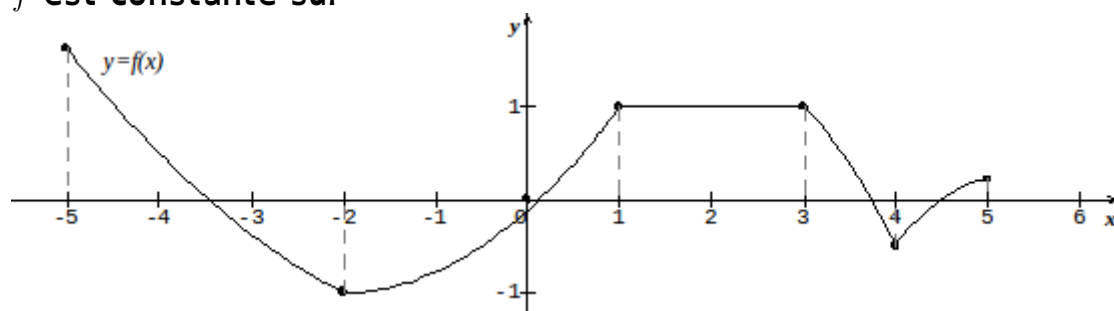
$\text{dom } f =$

$\text{im } f =$

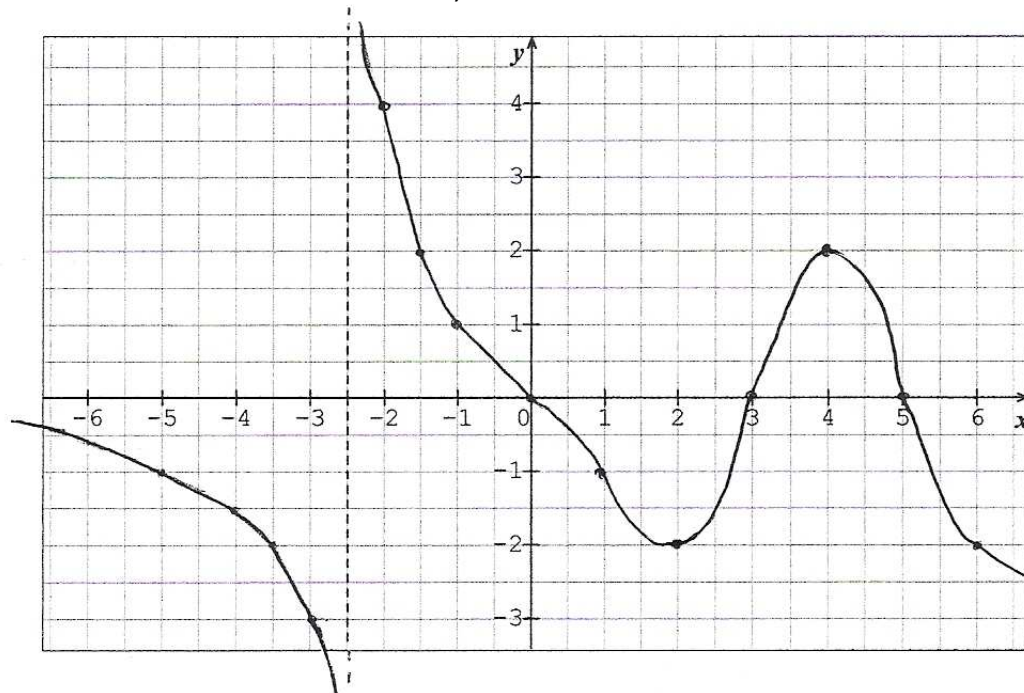
f est strictement croissante sur

f est strictement décroissante sur

f est constante sur



2. Pour la fonction ci-dessous, détermine :



(a) Son domaine

(b) L'image de -4 et 2

(c) $f(1)$ et $f(4)$

(d) Les antécédents de -2

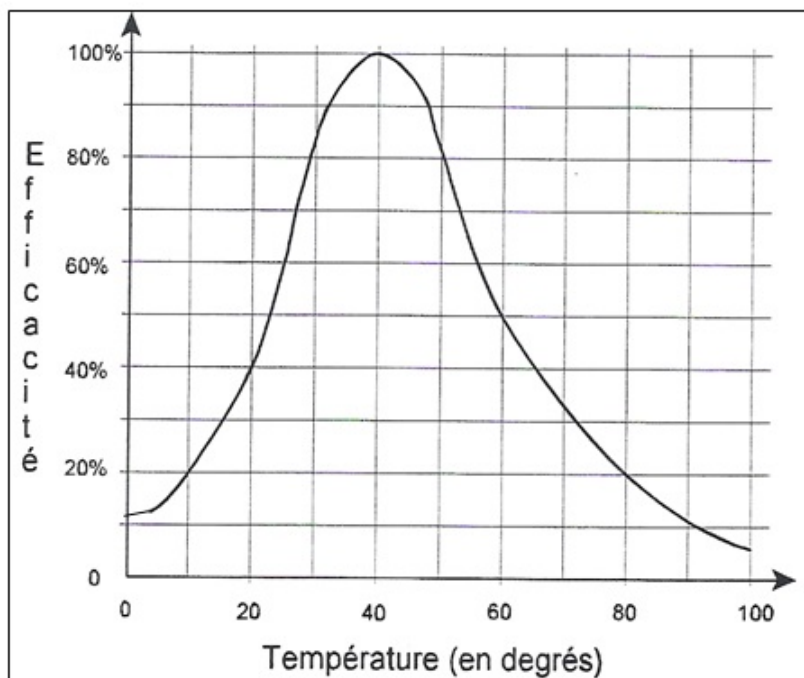
(e) $f(\quad) = 2$

(f) Les coordonnées des maximum et minimum éventuels

(g) Ses zéros

(h) Son tableau de variation

3. On étudie l'efficacité (en pourcentage) d'une poudre à laver en fonction de la température d'utilisation de l'eau de lavage utilisée. On consigne les résultats de l'étude dans le graphe suivant :



- Établis un tableau de points de la fonction décrite sur $[0; 100]$.
- Détermine la température à laquelle la poudre a la plus grande efficacité.
- A quelle(s) température(s) l'efficacité du produit est-elle de 80% ?
- Calcule l'intervalle de température qui permet à la poudre d'avoir une efficacité d'au moins 60%.
- Décris la variation de la fonction proposée (croissance, décroissance, maximum, minimum)

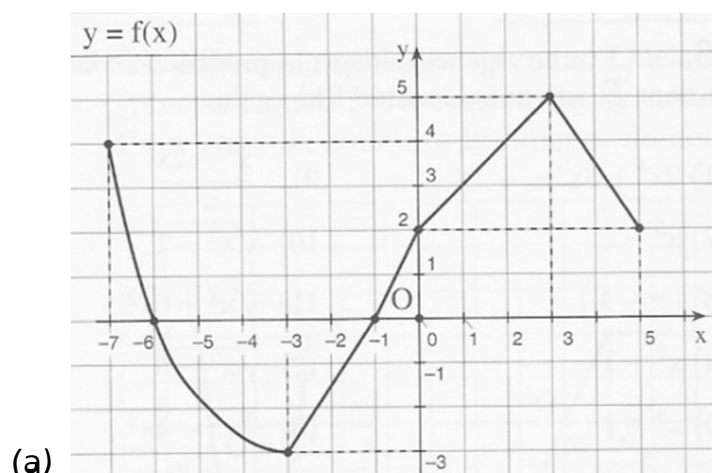
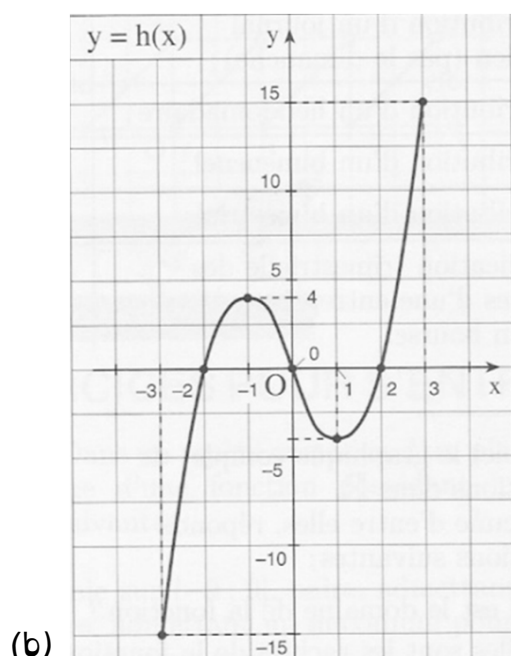
4. Justifie !

(a) $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$ est paire car $f(-x) =$

(b) $f(x) = 3x^3 - x$ est impaire car $f(-x) =$

(c) $f(x) = 2x^3 + 1$ n'est ni paire ni impaire car $f(-x) =$

5. Voici le graphique complet de 2 fonctions. Pour chacune d'entre elles, détermine le domaine, l'ensemble-image, les zéros, l'intersection avec l'axe des ordonnées, la parité et le tableau de variation.



2.3 Les sept fonctions de référence

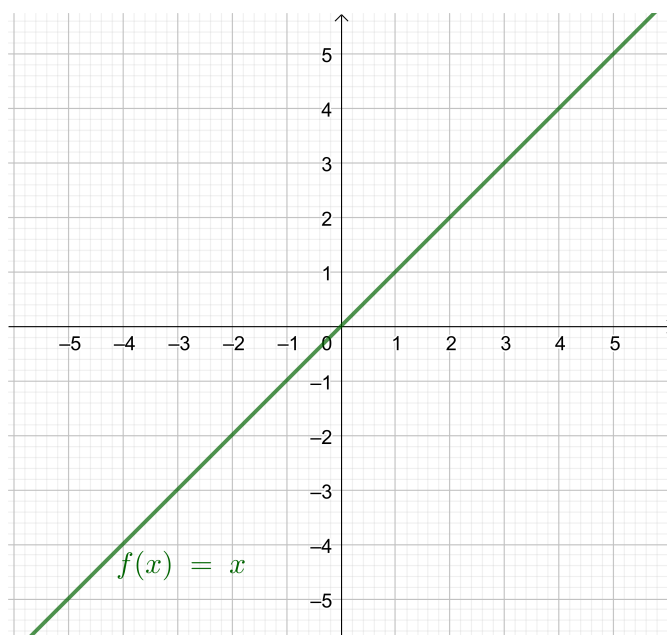
La fonction $x \rightarrow x$ (fonction identique)

C'est la fonction la plus paresseuse de toutes : elle ne fait rien.

L'image de 1 est 1, l'image de 2 est 2, de 18 c'est 18, de 0 c'est 0,...

$$f(x) = x$$

x	y=f(x)
1	1
2	2
-1	-1
0	0
-2	-2



$$\text{dom } f = \mathbb{R}$$

$$\text{im } f = \mathbb{R}$$

Signe

x	0
y	-
	0
	+

0 est la racine

Variation

x	
y	↗

Cette fonction est croissante.

$$f(-x) = -x = -f(x)$$

Cette fonction est impaire.

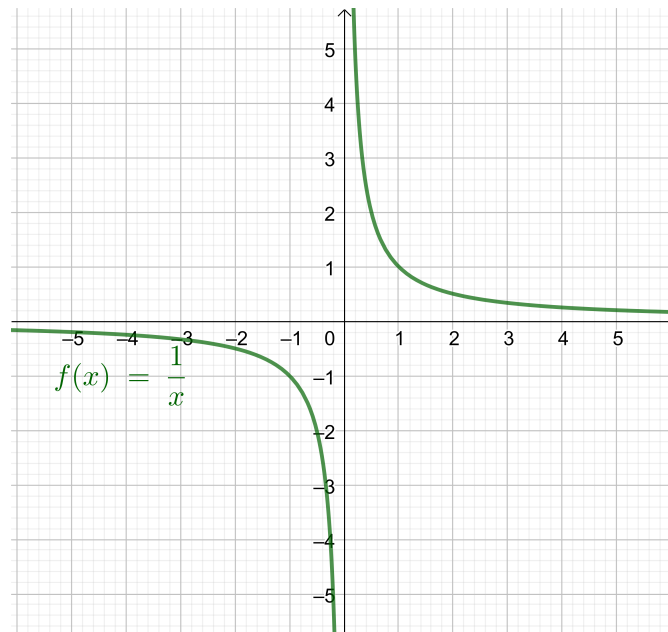
La fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ (fonction inverse)

Nous la connaissons déjà. La petite fille doit lever les pieds en $x=0$...

L'image de 1 est 1, l'image de 2 est $\frac{1}{2}$, de -1 c'est -1, 0 n'a pas d'image.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

x	y=f(x)
1	1
2	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	2
0	rien
-1	-1
-2	$-\frac{1}{2}$



$$\text{dom } f = \mathbb{R}_0$$

$$\text{im } f = \mathbb{R}_0$$

Signe

x	0
y	- +

Pas de racine

Variation

x	0
y	↘ ↘

Cette fonction n'est pas décroissante partout : $f(-1) < f(1)$.

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$

Cette fonction est impaire.

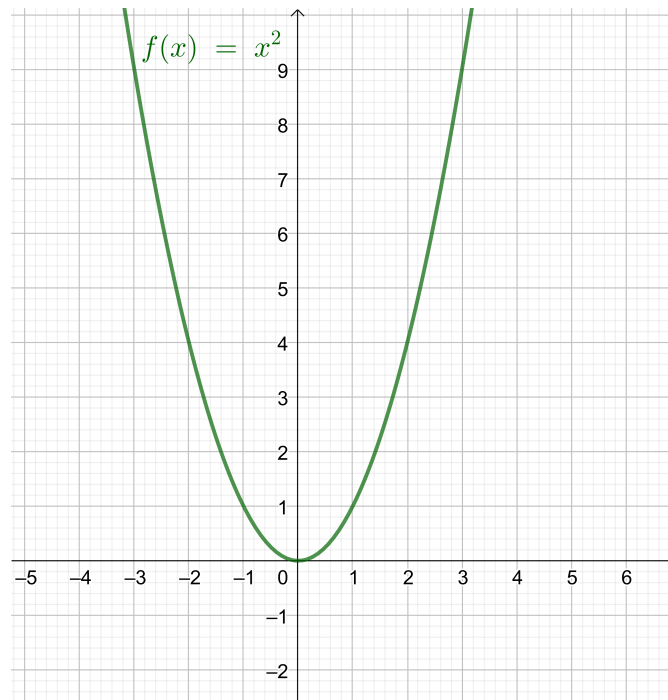
La fonction $x \rightarrow x^2$ (fonction carré)

Nous la connaissons déjà.

L'image de 1 est 1, l'image de 2 est 4, de -1 c'est 1, de 0 c'est 0, ...

$$f(x) = x^2$$

x	y=f(x)
1	1
2	4
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0
-1	1
-2	4



$$\text{dom } f = \mathbb{R}$$

$$\text{im } f = \mathbb{R}^+$$

Signe

x		0	
y	+	0	+

0 est la racine

Variation

x		0	
y	↘	0	↗

0 est le minimum.

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

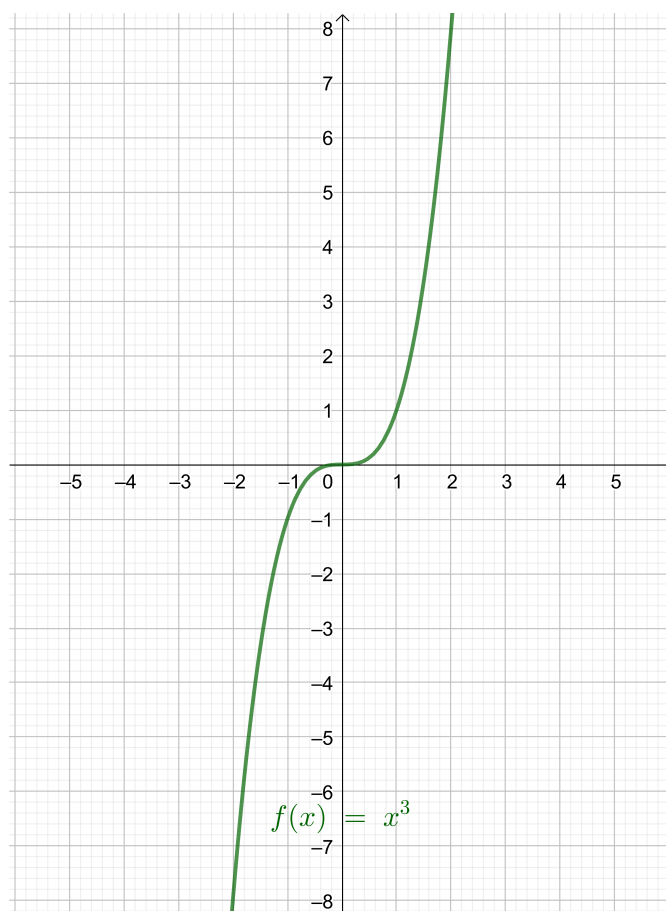
Cette fonction est paire.

La fonction $x \rightarrow x^3$ (fonction cube)

L'image de 1 est 1, l'image de 2 est 8, de -1 c'est -1, de 0 c'est 0, ...

$$f(x) = x^3$$

x	y=f(x)
1	1
2	8
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
0	0
-1	-1
-2	-8



$$\text{dom } f = \mathbb{R}$$

$$\text{im } f = \mathbb{R}$$

Signe

x	0
y	- 0 +

0 est la racine

Variation

x	
y	↗

Cette fonction est croissante.

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

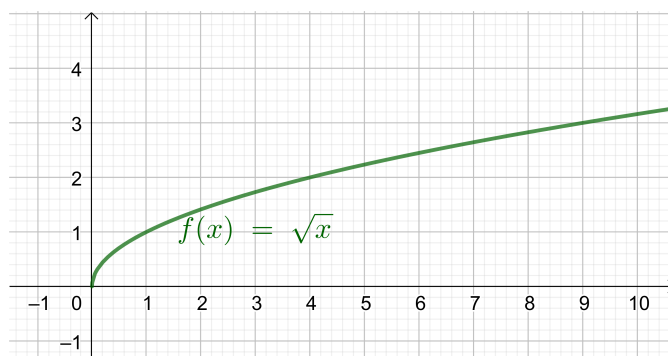
Cette fonction est impaire.

La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ (radical)

L'image de 1 est 1, l'image de 2 est $\sqrt{2}$, de 4 c'est 2, de 0 c'est 0, ...

$$f(x) = \sqrt{x}$$

x	y=f(x)
1	1
4	2
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
0	0
9	3



$$\text{dom } f = \mathbb{R}^+$$

$$\text{im } f = \mathbb{R}^+$$

Signe

x		0
y	///	0 +

0 est la racine.

Variation

x		0
y	///	0 ↗

0 est le minimum ; cette fonction est croissante.

$f(-x)$ n'a aucun sens.

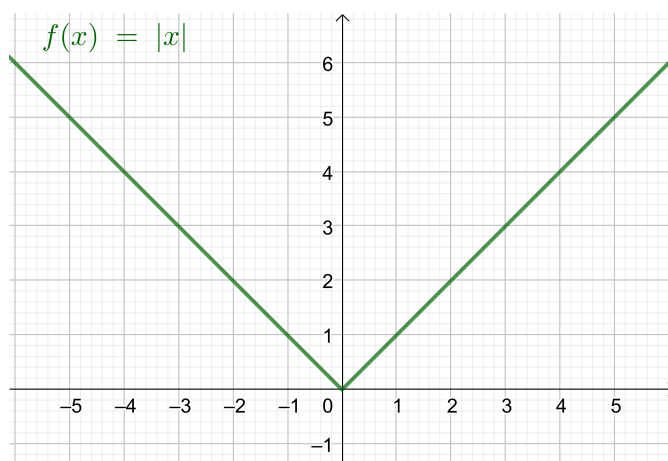
Cette fonction n'est ni paire ni impaire.

La fonction $x \rightarrow |x|$ (valeur absolue)

L'image de 1 est 1, l'image de 2 est 2, de -1 c'est 1, de 0 c'est 0, ...

$$f(x) = |x|$$

x	y=f(x)
1	1
2	2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0
-1	1
-2	2



$$\text{dom } f = \mathbb{R}$$

$$\text{im } f = \mathbb{R}^+$$

Signe	x	0
	y	+

0 est la racine

Variation	x	0
	y	↗

0 est le minimum.

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

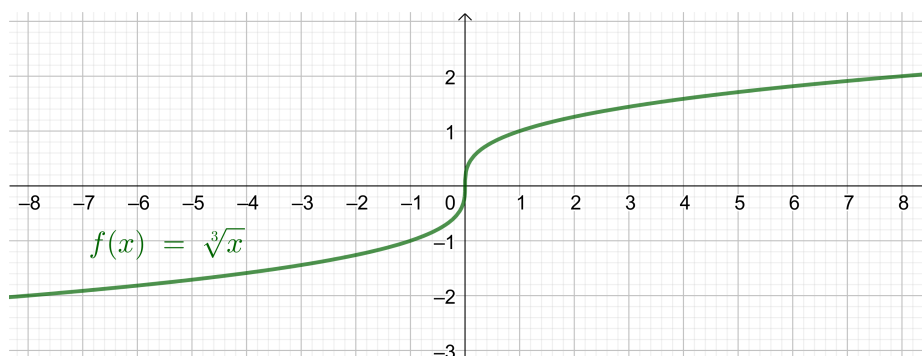
Cette fonction est paire.

La fonction $x \rightarrow \sqrt[3]{x}$ (racine cubique)

L'image de 1 est 1, l'image de 8 est 2, de -1 c'est -1, de 0 c'est 0, ...

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

x	y=f(x)
1	1
8	2
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
0	0
-1	-1
-8	-2



$$\text{dom } f = \mathbb{R}$$

$$\text{im } f = \mathbb{R}$$

Signe	x	0
	y	-

0 est la racine

Variation	x	
	y	↗

Cette fonction est croissante.

$$f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$$

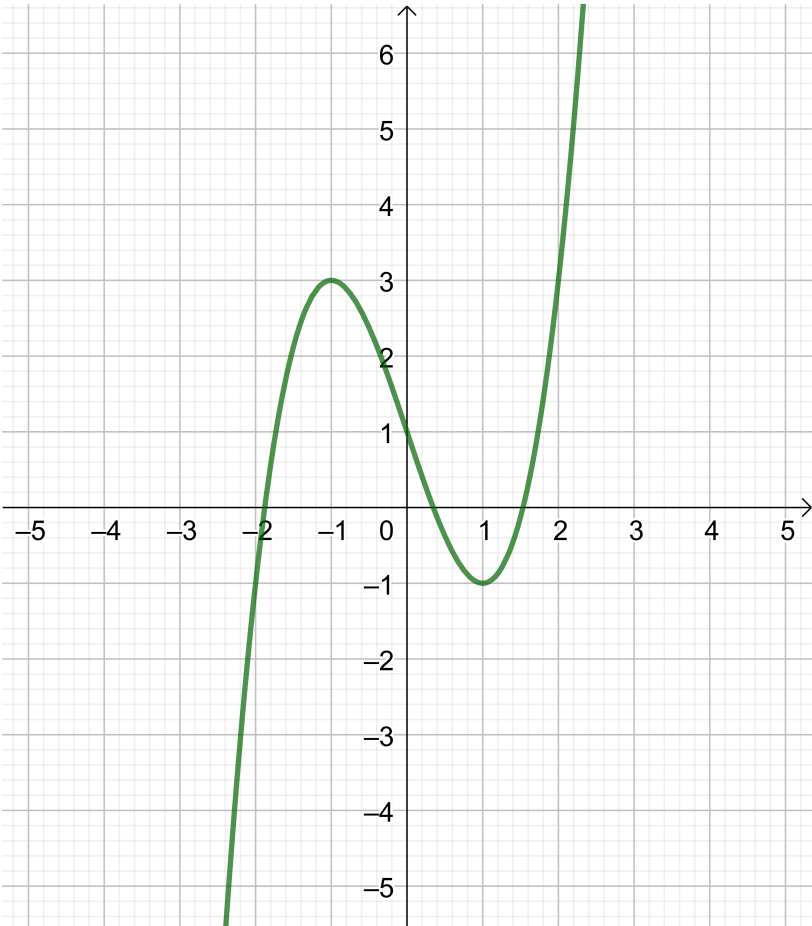
Cette fonction est impaire.

2.4 Composées de fonctions de référence

Il est parfois possible d'éviter la construction point par point du graphique d'une fonction et de l'obtenir en transformant une fonction f déjà connue.

Transformation de f	Exemple avec $f(x) = \sqrt{x}$
h tel que $h(x) = -f(x)$	$h(x) = -\sqrt{x}$
i tel que $i(x) = f(-x)$	$i(x) = \sqrt{-x}$
j tel que $j(x) = f(x) + p$	$j(x) = \sqrt{x} + 2$
k tel que $k(x) = f(x + p)$	$k(x) = \sqrt{x + 2}$
l tel que $l(x) = p.f(x)$	$l(x) = 2.\sqrt{x}$
m tel que $m(x) = f(p.x)$	$m(x) = \sqrt{2x}$

A la fonction f que voici, nous allons appliquer ces 6 transformations.



Comment construire le graphique de $h(x) = -f(x)$?

On opère une par rapport à

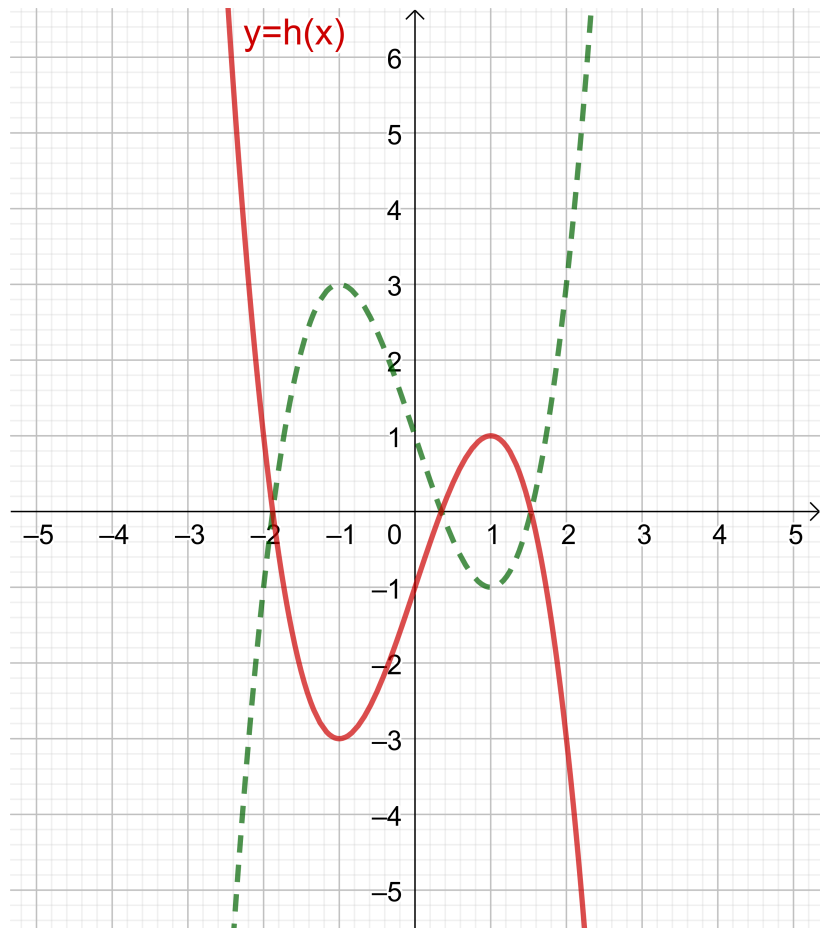
Que sont devenus les points suivants ?

$(-1; 3) \rightarrow$

$(0; 1) \rightarrow$

$(1; -1) \rightarrow$

$(x; y) \rightarrow (x; -y)$



Comment construire le graphique de $i(x) = f(-x)$?

On opère une par rapport à

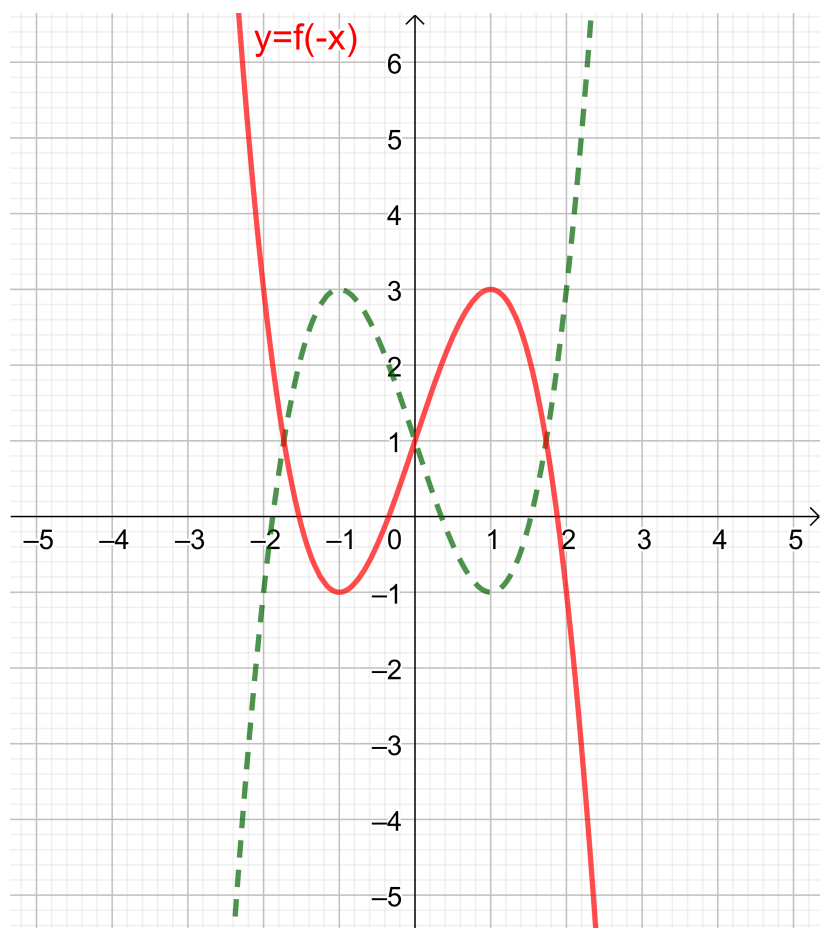
Que sont devenus les points suivants ?

$(-1; 3) \rightarrow$

$(0; 1) \rightarrow$

$(1; -1) \rightarrow$

$(x; y) \rightarrow (-x; y)$



Comment construire le graphique de $j(x) = f(x) + p$?

On opère une

de unités

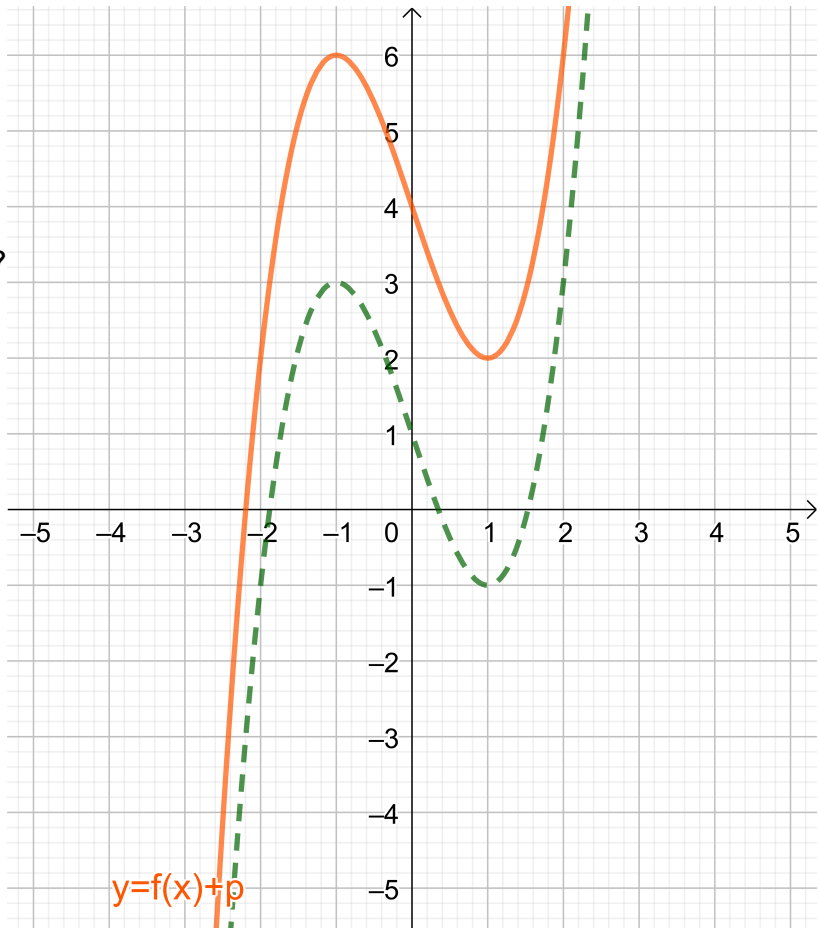
Que sont devenus les points suivants ($p=3$) ?

$(-1; 3) \rightarrow$

$(0; 1) \rightarrow$

$(1; -1) \rightarrow$

$(x; y) \rightarrow (x; y + p)$



$p=3$

$(x; y) \rightarrow (x; y + 3)$

Comment construire le graphique de $k(x) = f(x + 2)$?

Pour t'aider, remplis le tableau suivant.

x	x+2	f(x+2)
		3
		1
		-1

Comment construire le
graphique de

$$k(x) = f(x + p) ?$$

On opère une

de unités

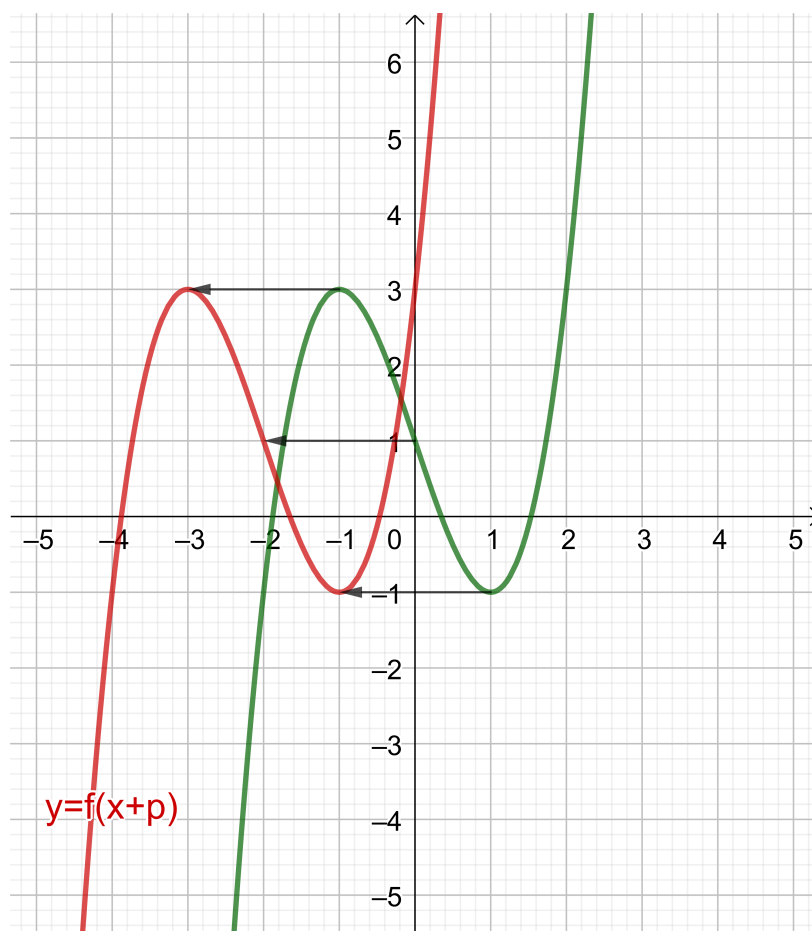
Que sont devenus
les points suivants ($p=2$) ?

$$(-1; 3) \rightarrow$$

$$(0; 1) \rightarrow$$

$$(1; -1) \rightarrow$$

$$(x; y) \rightarrow (x - p; y)$$



$p=2$

$$(x; y) \rightarrow (x - 2; y)$$

Comment construire le graphique de $l(x) = p \cdot f(x)$ ($p > 0$) ?

On opère une

de coefficient

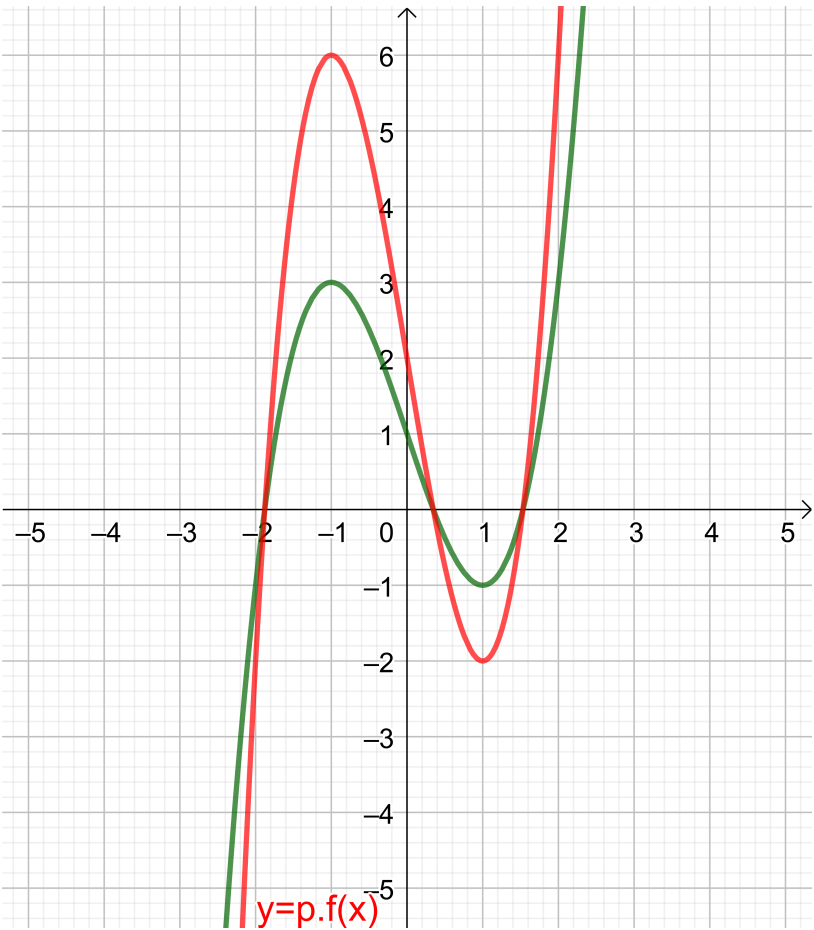
Que sont devenus les points suivants ($p=2$) ?

$(-1; 3) \rightarrow$

$(0; 1) \rightarrow$

$(1; -1) \rightarrow$

$(x; y) \rightarrow (x; p \cdot y)$



$p=2$

$(x; y) \rightarrow (x; 2y)$

Comment construire le graphique de $m(x) = f(2x)$?

Pour t'aider, remplis le tableau suivant.

x	2x	f(2x)
		3
		1
		-1

Comment construire le graphique de

$$m(x) = f(p.x) \quad (p > 0) ?$$

On opère une

de coefficient

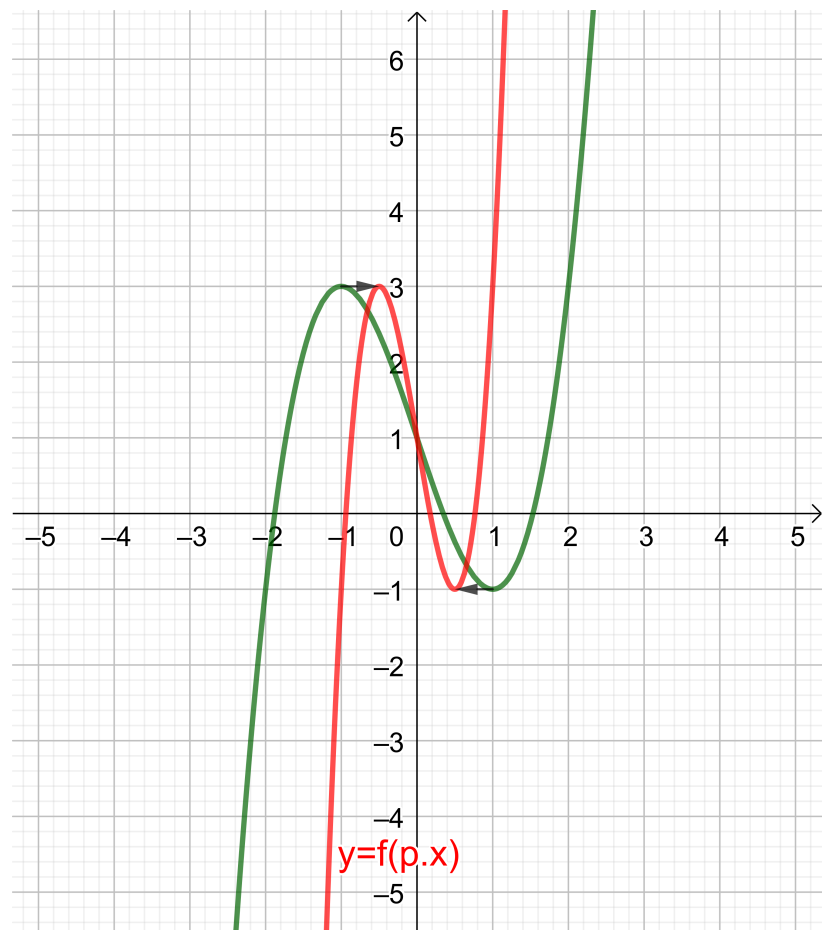
Que sont devenus les points suivants ($p=2$) ?

$$(-1; 3) \rightarrow$$

$$(0; 1) \rightarrow$$

$$(1; -1) \rightarrow$$

$$(x; y) \rightarrow \left(\frac{x}{p}; y \right)$$



$p=2$

$$(x; y) \rightarrow \left(\frac{x}{2}; y \right)$$

Exercices

1. Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$, exprime avec $f(x)$:

(a) $g(x) = \sqrt[3]{x} + 2$

(b) $h(x) = \sqrt[3]{x-1}$

(c) $i(x) = -\sqrt[3]{2x}$

(d) $j(x) = 5.\sqrt[3]{x} - 3$

2. A partir de la fonction donnée par $f(x) = \sqrt{x}$,

(a) construis le graphe des fonctions suivantes.

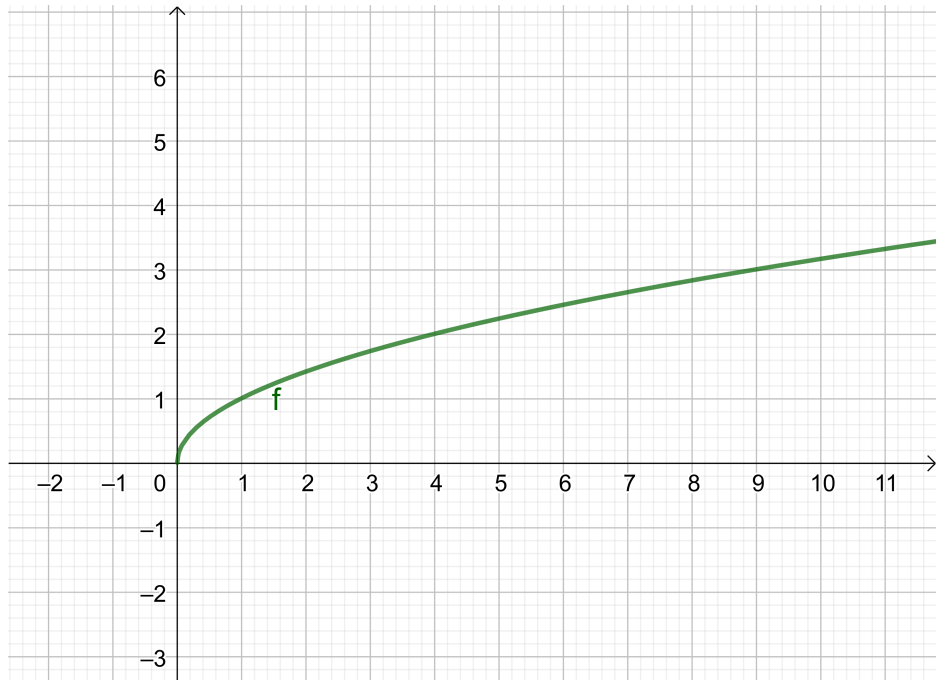
(b) Précise dans chaque cas la transformation effectuée. Utilise des couleurs.

1) $g(x) = \sqrt{x} - 1$

2) $h(x) = \sqrt{x+2}$

3) $i(x) = 2\sqrt{x}$

4) $j(x) = -\sqrt{x}$



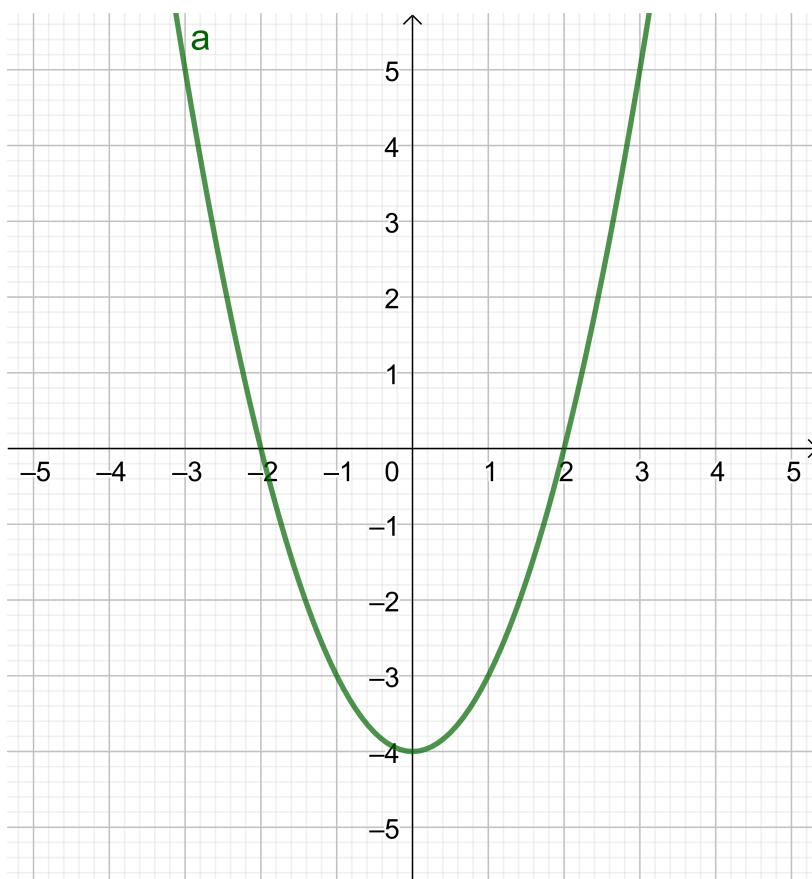
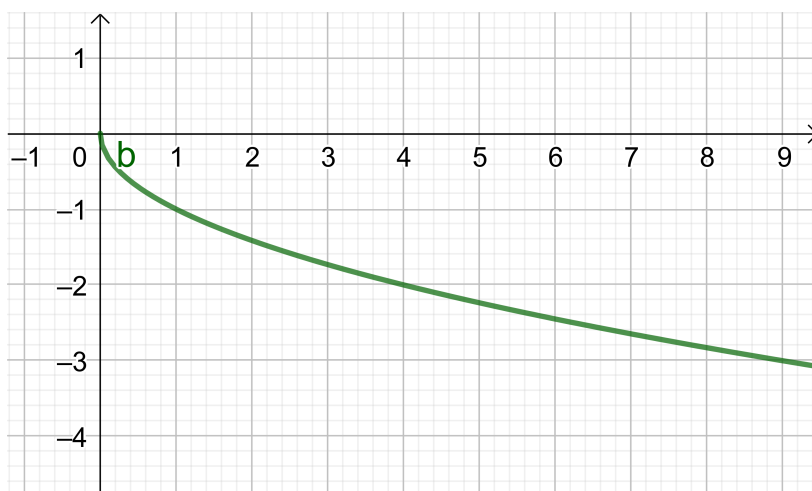
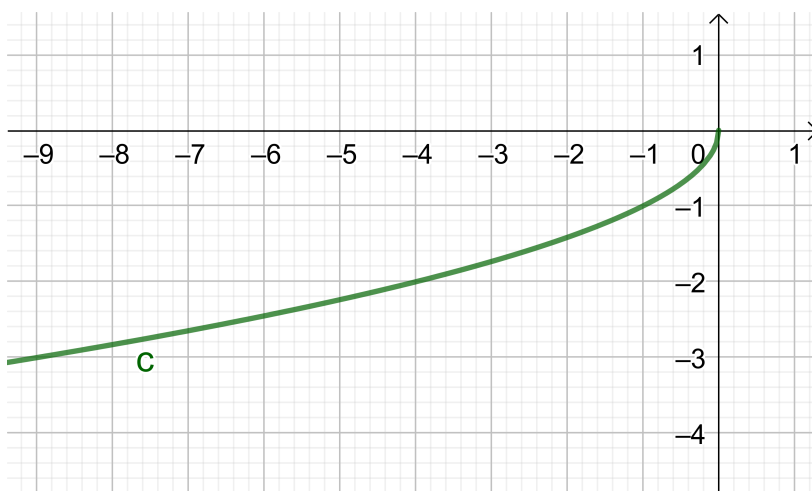
3. Chacune des fonctions suivantes a un graphe cartésien qui est obtenu en transformant celui d'une fonction de référence.

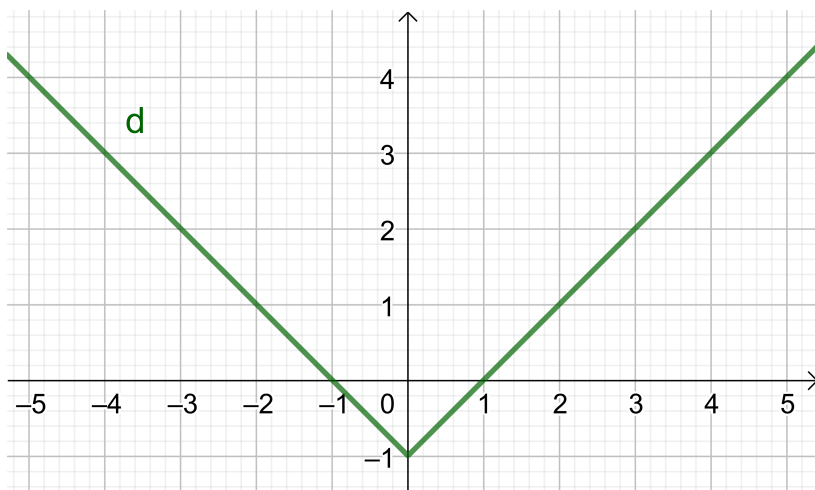
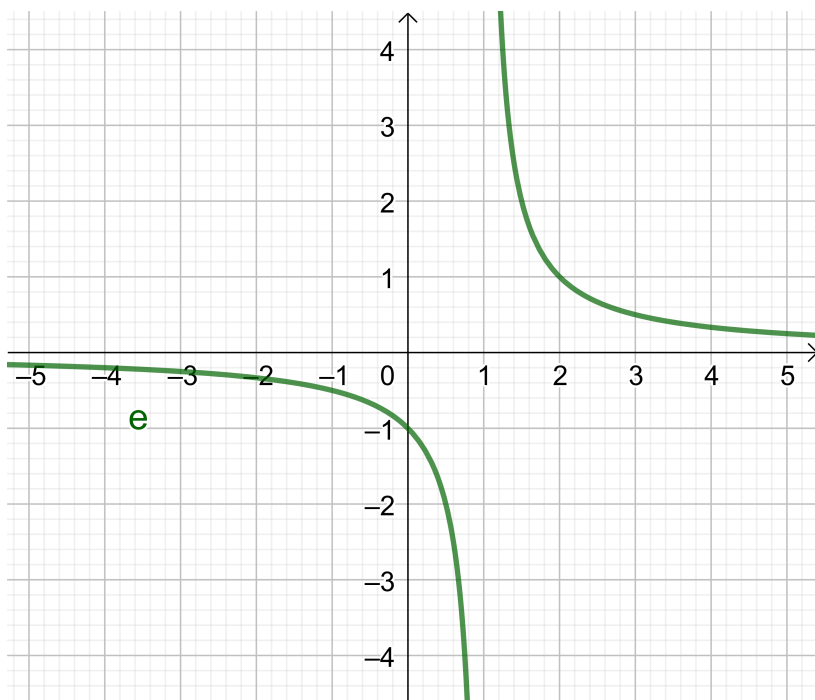
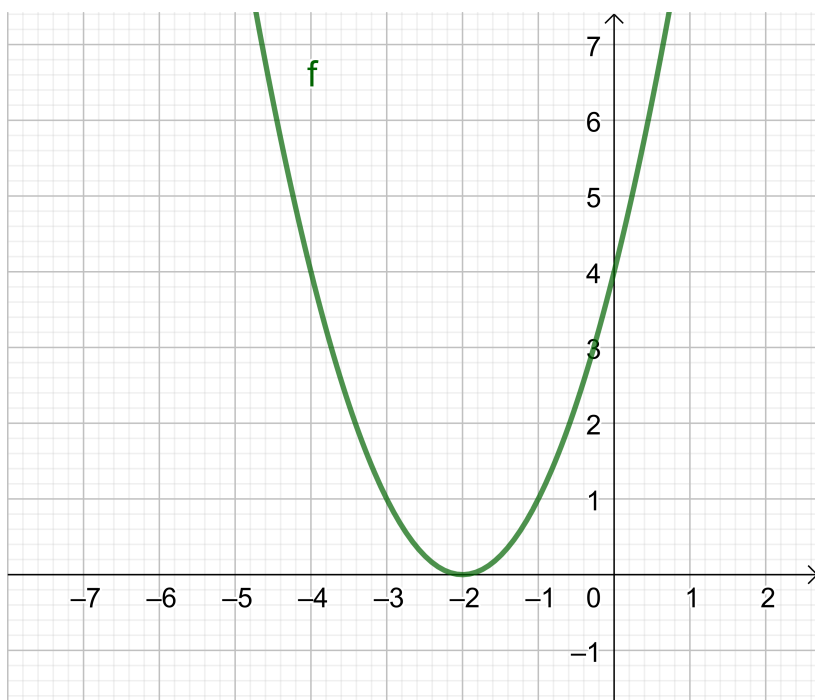
(a) Retrouve la fonction de référence dont est issu le graphe.

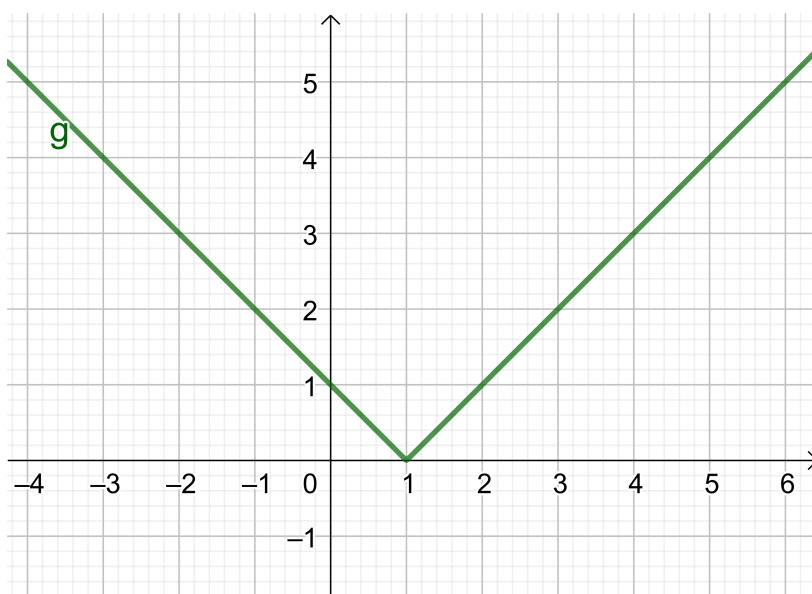
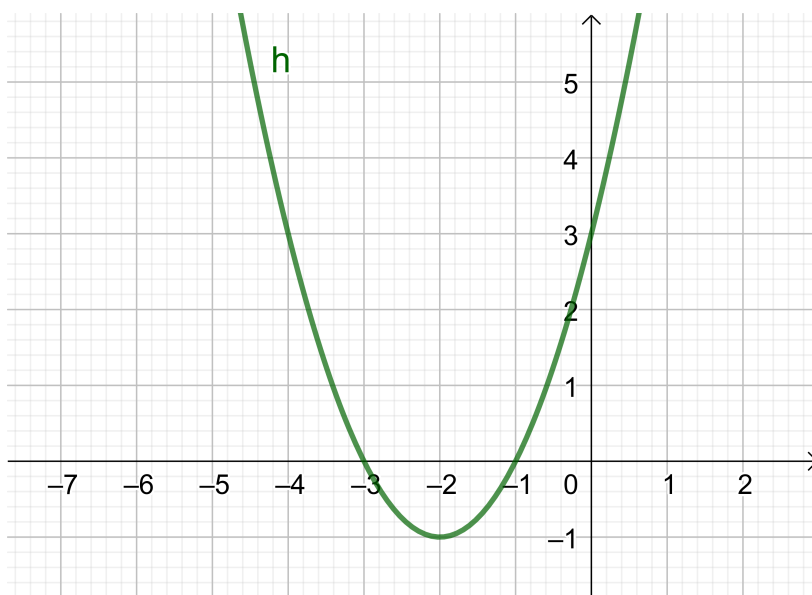
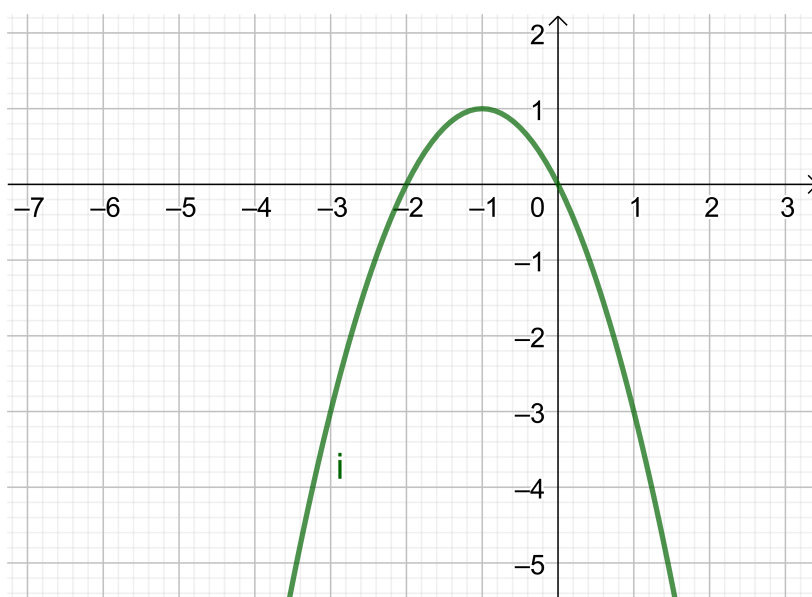
(b) Précise la transformation qui a permis de l'obtenir.

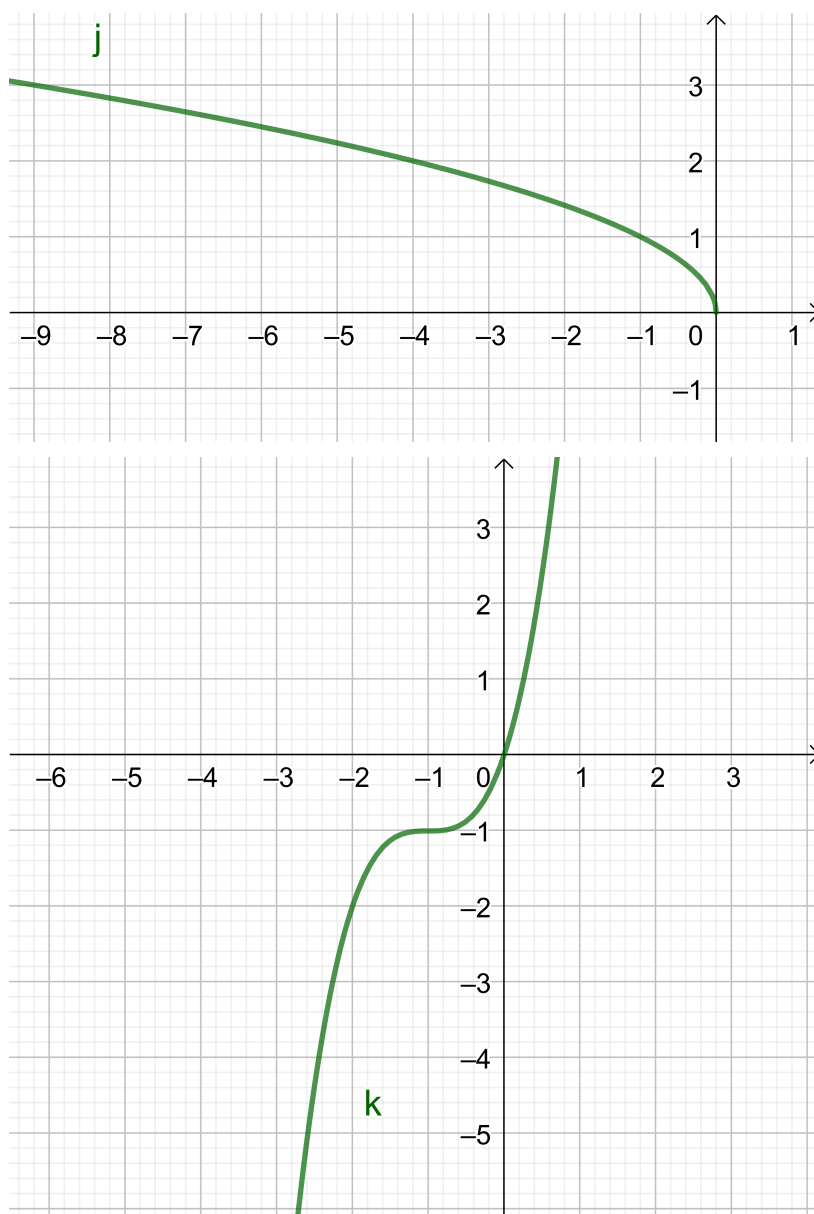
(c) Donne la transformation des coordonnées.

(d) Trouve la formule de la fonction dessinée.









4. Partant de $f(x) = x^2$, écris :

- (a) $4.f(x)$
- (b) $f(-x)$
- (c) $f(x+7)$
- (d) $f(x-2)$
- (e) $f(x) - 1$
- (f) $-f(x)$
- (g) $f(2x)$

2.5 Transformées de x^2

1. Partant de $f(x) = x^2$, passe à g tel que $g(x) = (x + 2)^2$.
 - (a) Donne la transformation qui fait passer de f à g .
 - (b) Donne la transformation des coordonnées.
 - (c) Trace les deux fonctions sur le même graphique.
2. Partant de $g(x) = (x + 2)^2$, passe à i tel que $i(x) = 2(x + 2)^2$.
 - (d) Donne la transformation qui fait passer de g à i .
 - (e) Donne la transformation des coordonnées.
 - (f) Trace la fonction i sur le même graphique que la fonction g ci-dessus.
3. Partant de $g(x) = (x + 2)^2$, passe à j tel que $j(x) = -(x + 2)^2$.
 - (g) Donne la transformation qui fait passer de g à j .
 - (h) Donne la transformation des coordonnées.
 - (i) Trace la fonction j sur le même graphique aussi que la fonction g ci-dessus.
4. Partant de $f(x) = x^2$, passe à h tel que $h(x) = (x - 3)^2$.
 - (a) Donne la transformation qui fait passer de f à h .
 - (b) Donne la transformation des coordonnées.
 - (c) Trace les deux fonctions sur le même graphique.
5. Partant de $h(x) = (x - 3)^2$, passe à k tel que $k(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2$.
 - (a) Donne la transformation qui fait passer de h à k .
 - (b) Donne la transformation des coordonnées.
 - (c) Trace la fonction k sur le même graphique que la fonction h ci-dessus.
6. Partant de $h(x) = (x - 3)^2$, passe à l tel que $l(x) = -2(x - 3)^2$.
 - (a) Donne la transformation qui fait passer de h à l .
 - (b) Donne la transformation des coordonnées.
 - (c) Trace la fonction l sur le même graphique aussi que la fonction h ci-dessus.

Chapitre 3

Deuxième degré

Table des matières

1. Fonctions du deuxième degré

2. Fonctions du deuxième degré, Le retour

3. Équations et inéquations

4. Factorisation du trinôme

Objectifs

CONNAÎTRE

- Lier les diverses écritures de la fonction du deuxième degré avec certaines caractéristiques de la fonction ou de son graphique :

$$x \rightarrow ax^2 + bx + c$$

$$x \rightarrow a(x + p)^2 + v$$

$$x \rightarrow a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Interpréter graphiquement les solutions d'une équation ou d'une inéquation du deuxième degré.

APPLIQUER

- Résoudre graphiquement et algébriquement une équation ou une inéquation du deuxième degré.
- Associer l'expression analytique d'une fonction du deuxième degré à son graphique et réciproquement.

- Construire l'expression analytique d'une fonction du deuxième degré à partir de son graphique et réciproquement.
- Déterminer les caractéristiques d'une fonction du deuxième degré.
- Déterminer l'expression analytique d'une fonction du deuxième degré répondant à des conditions données.
- Calculer la distance d'un point à une droite.

TRANSFÉRER

- Modéliser et résoudre un problème d'optimisation.
- Modéliser et résoudre des problèmes issus de situations diverses.



En plus des outils de « Tétramath, la méthode », tu auras besoin d'une calculette.



<http://tetramath.jean-luc-goffin.be/degre2>

3.0 Prérequis

1. Effectue et réduis les termes semblables.

(a) $(2x + 1) \cdot (3x - 2) =$

(b) $(2x - a) \cdot (2a - 3x) =$

(c) $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - 2x^2\right) =$

(d) $3 \cdot \left(\frac{x}{3} - 2\right) - 2 \cdot \left(\frac{x}{2} + 4\right) =$

(e) $3 \cdot (x - 2) + 5 \cdot (x + 1) \cdot (2x - 3) =$

(f) $[2x - (x + 1)] - 2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) =$

2. Reconnais le (ou les) produits remarquables à utiliser, effectue ensuite la formule et réduis les éventuels termes semblables :

(a) $(2a + 3b)^2 =$

(b) $(3x - 4)^2 =$

(c) $(x - 2) \cdot (x + 2) =$

(d) $(3k + 2) \cdot (3k - 2) \cdot (9k^2 + 4) =$

(e) $(6a^2x^3 - 3ax)^2 =$

- (f) $(-2a + 1)^2 =$
 (g) $\left(\frac{a^2}{3} + \frac{2b}{5}\right) \cdot \left(\frac{a^2}{3} - \frac{2b}{5}\right) =$
 (h) $(-2a^2 - 7x^2)^2 =$
 (i) $(-5c + 2a) \cdot (2a + 5c) =$
 (j) $(2x - 3y) \cdot (3x + 2y) + 2 \cdot (x - y)^2 =$
 (k) $(5y - 6x) \cdot (5y + 6x) - (-3y + 2x)^2 =$

3. Factorise le plus finement possible les expressions suivantes :

- (a) $3xy + 3xz =$
 (b) $36xy^2 + 9x^2y - 27xy =$
 (c) $4a^2 - 25b^2 =$
 (d) $(x - 1) \cdot (x + 2) + (x - 1) \cdot (x + 3) =$
 (e) $x^3 - 16x =$
 (f) $(2x + 3)^2 - 49 =$
 (g) $x^2 + 9 =$
 (h) $(7x + 6) \cdot (3x - 5) - (3x - 5) =$
 (i) $4x^2 - 28x + 49 =$
 (j) $(x - 1)^2 - (2x - 3)^2 =$
 (k) $12ab - 15b^2 + 24ay - 30by =$
 (l) $2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 =$
 (m) $5x^4 - 20x^2 =$
 (n) $x^4 - 16 =$
 (o) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 =$
 (p) $4 \cdot (x - 1) - 3 \cdot (x - 1)^2 =$
 (q) $3a \cdot (x - 4) - 2b \cdot (4 - x) =$
 (r) $x^2 \cdot (a - b) + 4 \cdot (b - a) =$
 (s) $4x^3 - 12x^2 + 9x =$
 (t) $(2x - 7) \cdot (x + 4) - (4x + 1) \cdot (4 + x) =$
 (u) $3x^2 + 5x + 2 =$
 (v) $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 =$
 (w) $2x^3 - 8x^5 - 1 + 4x^2 =$
 (x) $2x^4 - 10x^3 + 16x^2 - 8x =$
 (y) $x^3 - 19x + 30 =$
 (z) $2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9 =$

3.1 Fonctions du deuxième degré



Dans le chapitre 2, nous avons vu que

1. Le passage de $f(x) = x^2$ à $g(x) = a(x + p)^2$ se caractérise par

une translation horizontale de $-p$ unités

suivie d'une déformation verticale de coefficient $|a|$;

si a est négatif, la déformation est composée avec une symétrie d'axe horizontal.

$$(x; y) \rightarrow (x - p; ay)$$

2. La courbe obtenue s'appelle une parabole.

3. L'axe de symétrie, axe des ordonnées (y) pour la fonction x^2 ,

devient la droite verticale d'équation $x = -p$.



<http://tetramath.jean-luc-goffin.be/fonctions> (Avec x^2)



Et bien, c'est presque tout ce qu'il faut savoir.
Prenons une quelconque fonction du deuxième degré :
 $2x^2 + 4x - 1$.

Je vais essayer de l'écrire $g(x) = a(x + p)^2$.

Écris la justification à côté de chaque ligne.

$$2x^2 + 4x - 1 = 2 \cdot (x^2 + 2x - \frac{1}{2})$$

$$2 \cdot (x^2 + 2x - \frac{1}{2}) = 2 \cdot (x^2 + 2x + 1 - \frac{3}{2})$$

$$2 \cdot (x^2 + 2x + 1 - \frac{3}{2}) = 2 \cdot (x^2 + 2x + 1) - 3$$

$$2 \cdot (x^2 + 2x + 1) - 3 = 2 \cdot (x + 1)^2 - 3$$

J'ai bien obtenu $g(x) = a(x + m)^2$ sauf qu'il y a -3 à la fin du calcul.

1. Le passage de $f(x) = x^2$ à $g(x) = 2(x + 1)^2 - 3$ se caractérise par

une translation horizontale de -1 unité
 suivie d'une déformation verticale de coefficient 2
 puis d'une translation verticale de -3 unités.

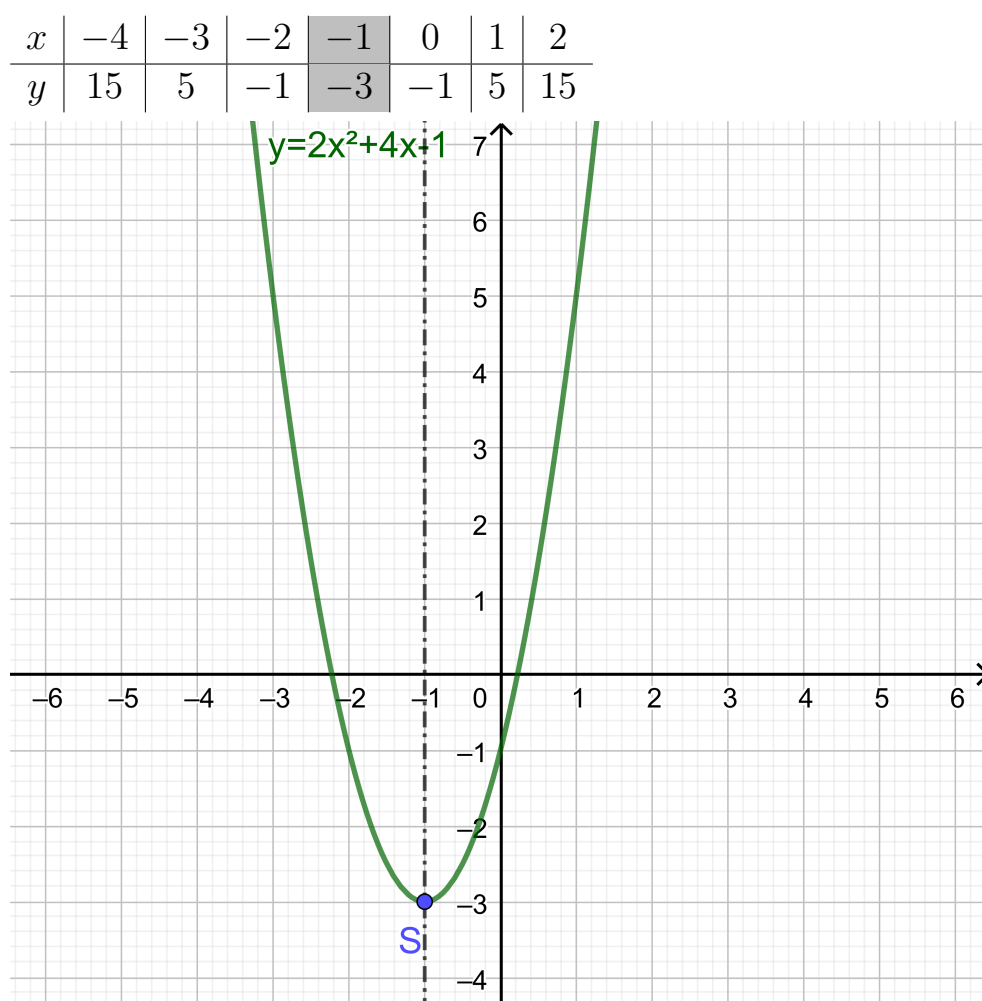
2. La courbe obtenue est une parabole.

3. L'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = -1$.

Pour tracer cette fonction, cherche son sommet et quelques points symétriques, comme dans le chapitre 4 :



<http://tetramath.jean-luc-goffin.be/geometrie> (Parabole)



Comme $a > 0$, je n'ai pas du faire de symétrie d'axe Ox .

La parabole est souriante. Autrement dit :

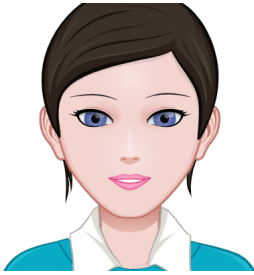
x		-1
$2x^2 + 4x - 1$	$\searrow$	m

Si $a < 0$, le tableau de variation serait :

x		$-\frac{b}{2a}$
$f(x)$	$\nearrow$	M

A toi!

Représente les fonctions du deuxième degré suivantes, avec axe de symétrie, sommet et tableau de variation.



Oups! J'oublie un « petit » théorème :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + v$$

Ce qui donne $x = -\frac{b}{2a}$ comme axe de symétrie.

Il faudra voir ça dans « à retenir »...

Exercice

Représente les fonctions du deuxième degré suivantes, avec axe de symétrie, sommet et tableau de variation.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

2. $f(x) = x^2 - 25$

3. $f(x) = 3x^2 - 9x$

4. $f(x) = 4x^2 + 20x + 25$

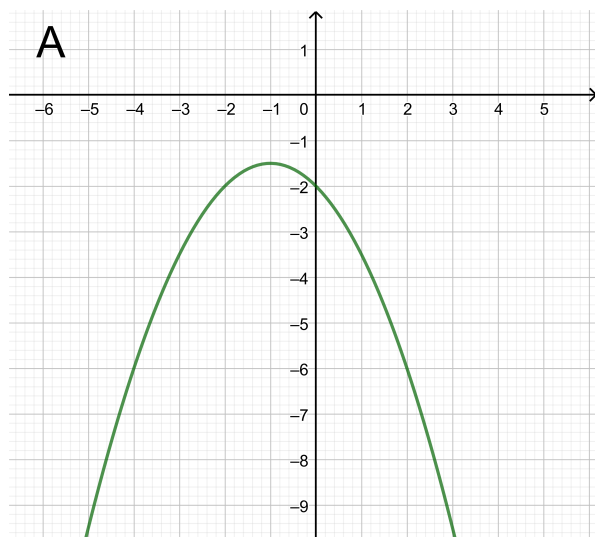
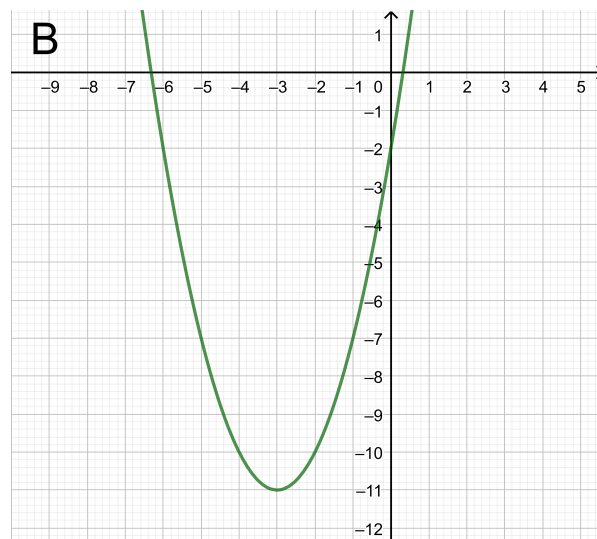
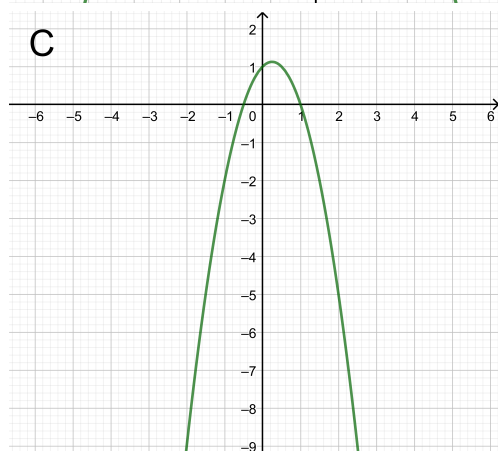
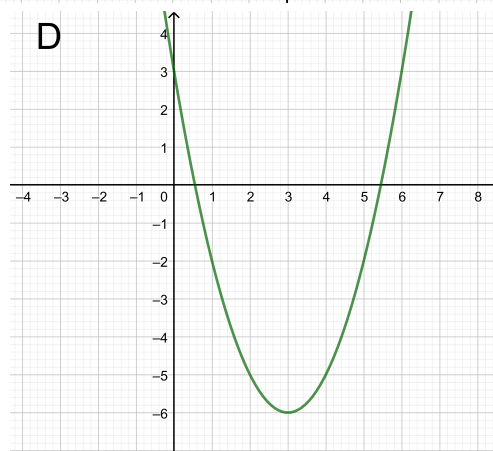
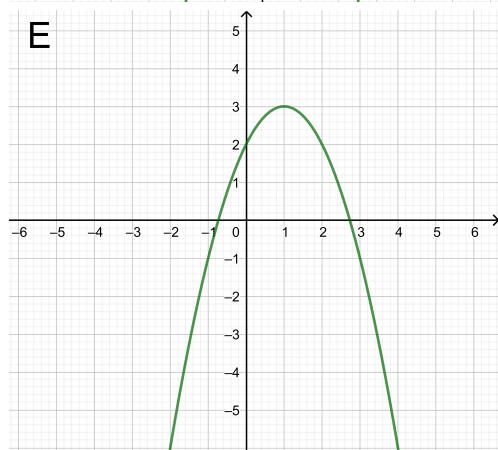
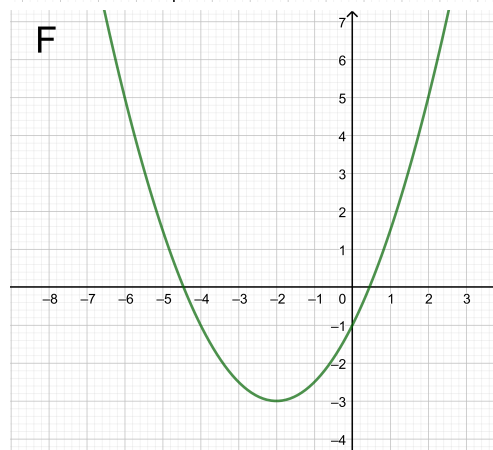
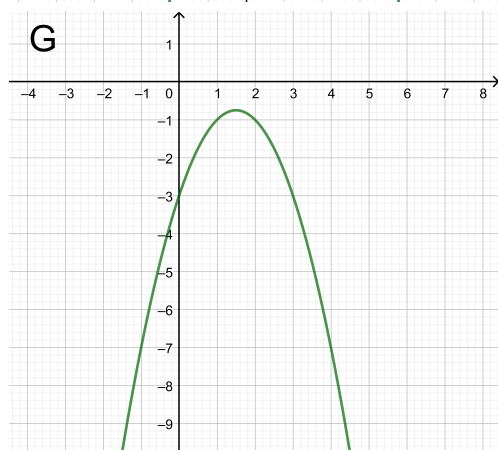
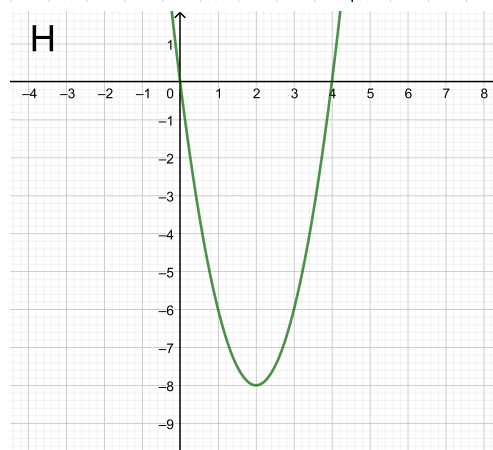
5. $f(x) = -x^2 + 5x - 4$

6. $f(x) = \frac{x^2}{3} + 2x + 4$

3.2 Fonctions du deuxième degré, le retour

Voici 8 graphiques de fonctions du second degré.

Lequel correspond à $f(x) = -x^2 + 2x + 2$?



Pour $f(x) = -x^2 + 2x + 2$,

$$a < 0$$

$$-\frac{b}{2a} = \quad \text{(visualise l'axe de symétrie)}$$

et la fonction contient le point $(0; \quad)$.

Il s'agit donc du graphique

Exercices

1. Avec les mêmes dessins, associe à chaque fonction du second degré le graphique qui lui convient

(a) $f(x) = -x^2 + 2x + 2$

(b) $f(x) = 2x^2 - 8x$

(c) $f(x) = x^2 - 6x + 3$

(d) $f(x) = -x^2 + 3x - 3$

(e) $f(x) = x^2 + 6x - 2$

(f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - 2$

(g) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$

(h) $f(x) = -2x^2 + x + 1$

2. (Ex 22) On considère la parabole obtenue comme le graphe de la fonction f définie par $f(x) = 36x - 2x^2 - 34$.

Le sommet est-il un point maximum ou minimum ? Son ordonnée est-elle positive ou négative ?

3. $f(x) = x^2 + bx + c$

- (a) Détermine b et c pour que $x = 2$ soit axe de symétrie et que la fonction contienne le point $(0; 3)$.

Trace ensuite la fonction.

- (b) Détermine b et c pour que $(1; 2)$ soit le sommet.

Trace ensuite la fonction.

4. $f(x) = ax^2 - x + c$

- (a) Détermine a et c pour que $x = 2$ soit axe de symétrie et que la fonction contienne le point $(0; 3)$.

Trace ensuite la fonction.

- (b) Détermine a et c pour que $(1; 2)$ soit le sommet.

Trace ensuite la fonction.

- (c) Détermine a et c pour que $(-1; 1)$ soit le sommet.

Trace ensuite la fonction.

5. $f(x) = ax^2 + bx + 3$

- (d) Détermine a et b pour que $(1; 4)$ soit le sommet.

Trace ensuite la fonction.

- (e) Détermine a et b pour que $(-1; 1)$ soit le sommet.

Trace ensuite la fonction.

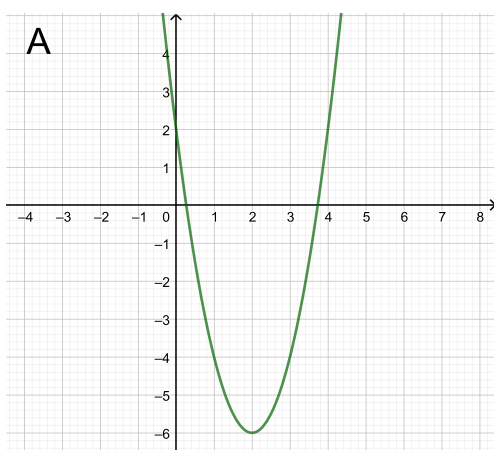
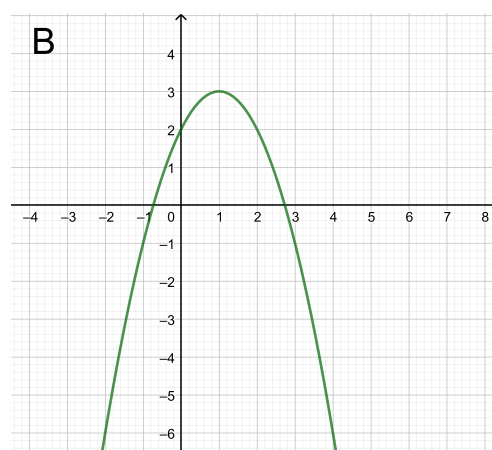
6. Un papa a filmé avec une caméra numérique son fils en train de lancer un ballon de basket. En regardant cet enregistrement avec arrêts sur image, il recueille les données du tableau ci-dessous.

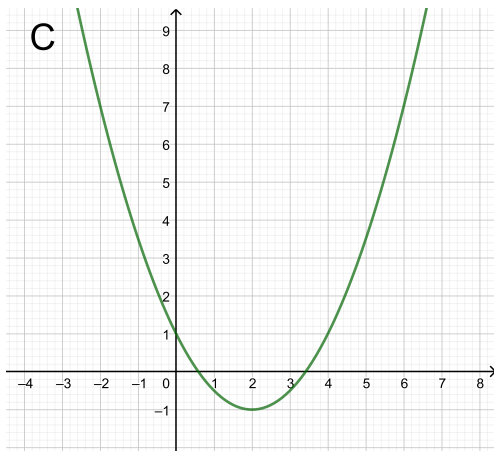
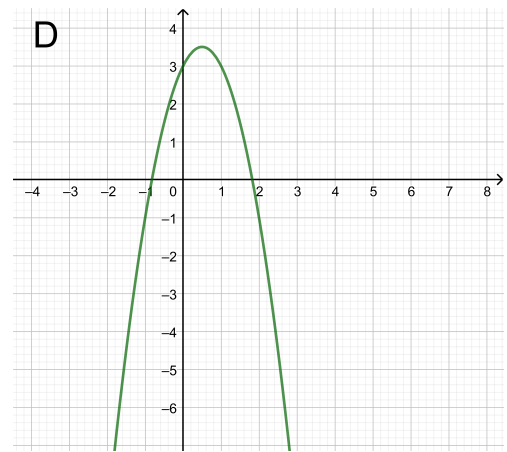
Reporte ces données dans un repère puis détermine une fonction qui modélise le phénomène observé.

Compare ensuite les hauteurs calculées à l'aide du modèle aux hauteurs mesurées.

Temps en seconde	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Hauteur du ballon en cm	84	121	149	167	175	174	163	143	114	75

7. Voici 4 fonctions du deuxième degré. Détermine $f(x)$.



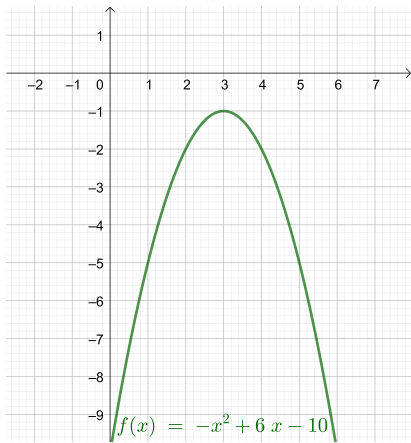
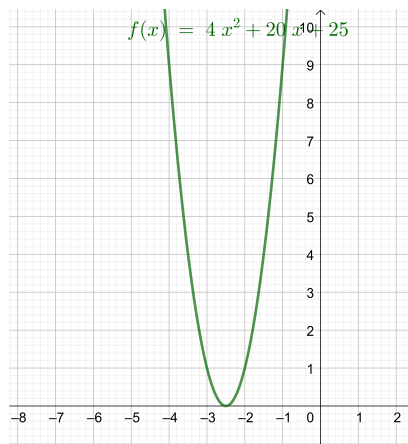
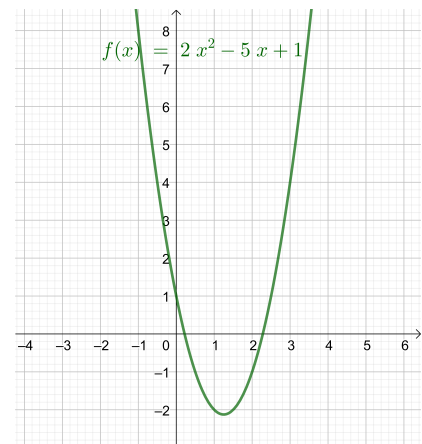


3.3 Équations et inéquations du deuxième degré

Incursion

Une équation du deuxième degré a la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Avec $f(x) = ax^2 + bx + c$, cela revient à $f(x) = 0$ ou encore $y = 0$ sur son graphique.



Observe les 3 graphiques ci-dessus.

Dans le premier, $y \neq 0$. Il n'y a pas de solution.

Dans le deuxième, $y = 0$ une fois. Il y a une solution.

Dans le troisième, $y = 0$ deux fois. Il y a deux solutions.



C'est la même chose pour tous les graphes d'une fonction du second degré. L'observer, c'est bien, mais peux-tu le démontrer ?

Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ **Rappel**

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

peut se réécrire sous la forme

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + v$$

et même (« A retenir » section 5.1) :

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$f(x) = 0 \text{ devient donc } a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = -\frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\text{ou encore } \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Si $b^2 - 4ac < 0$	Si $b^2 - 4ac = 0$	Si $b^2 - 4ac > 0$
	$x = -\frac{b}{2a}$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Il n'y a pas de racine.	Il y a une racine.	Il y a deux racines.

Il suffit donc de calculer $b^2 - 4ac$ pour séparer les trois cas.

On dit que $b^2 - 4ac$ est le discriminant ou le réalisant.

Notation : $\rho = b^2 - 4ac$.

Exercice**1. Résous les équations suivantes**

(a) $x^2 + 5x + 6 = 0$

(b) $x^2 - 6x + 8 = 0$

(c) $x^2 + x - 1 = 0$

(d) $9x^2 + 24x + 16 = 0$

(e) $2x^2 + 3x + 4 = 0$

(f) $4x^2 = 16x$

(g) $18x^2 + 3x - 1 = 0$

(h) $x^2 - 5 = 0$

(i) $-x^2 + 2x + 5 = 0$

(j) $x^2 + \frac{x}{4} - \frac{3}{8} = 0$

(k) $-x^2 - 0,3x + 0,4 = 0$

(l) $x^2 = x$

(m) $-x^2 - 25 = 0$

(n) $x + 6x^2 = 1$

(o) $36x + 12 = 6x^2 - 6$

(p) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$

2. (Ex 25) Résoudre l'équation $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$.

Résolution d'équations incomplètes

Dans l'exercice précédent, nous avons rencontré

$4x^2 = 16x$ (f)

$x^2 - 5 = 0$ (h)

$x^2 = x$ (l)

$-x^2 - 25 = 0$ (m)

Ce sont des équations incomplètes :

Avec 0 dans le membre de droite,

il n'y a que deux termes dans le membre de gauche.

$4x^2 - 16x = 0$ (f)

$x^2 - x = 0$ (l)

Toutes ces équations peuvent se résoudre en faisant très peu de calculs.

(f) $4x^2 - 16x = 0$	(h) $x^2 - 5 = 0$	(l) $x^2 - x = 0$	(m) $-x^2 - 25 = 0$
$4x \cdot (x - 4) = 0$	$x^2 = 5$	$x \cdot (x - 1) = 0$	$-x^2 = 25$
$4x = 0$ ou $(x - 4) = 0$	$x = \pm\sqrt{5}$	$x = 0$ ou $(x - 1) = 0$	$x^2 = -25$
$x = 0$ ou $x = 4$		$x = 0$ ou $x = 1$	Pas de solution

Exercice**3. Résous les équations suivantes**

(a) $5x^2 + 1 = 0$

(b) $x^2 = 81$

(c) $7x^2 = 3x$

(d) $4x^2 - 3 = 0$

(e) $12x^2 - 27 = 0$

(f) $7x^2 + 9x = 0$

(g) $121 - 49x^2 = 0$

(h) $(x + 3)^2 = 5$

(i) $(x - 2)^2 = 9(x - 2)$

(j) $x^2 - 10 = 0$

(k) $(x - 9)^2 + 1 = 0$

(l) $(4x - 7)^2 = 0$

Signe d'une fonction du second degré**Rappel : signe d'une fonction**

Le signe d'une fonction est le signe de ses images.

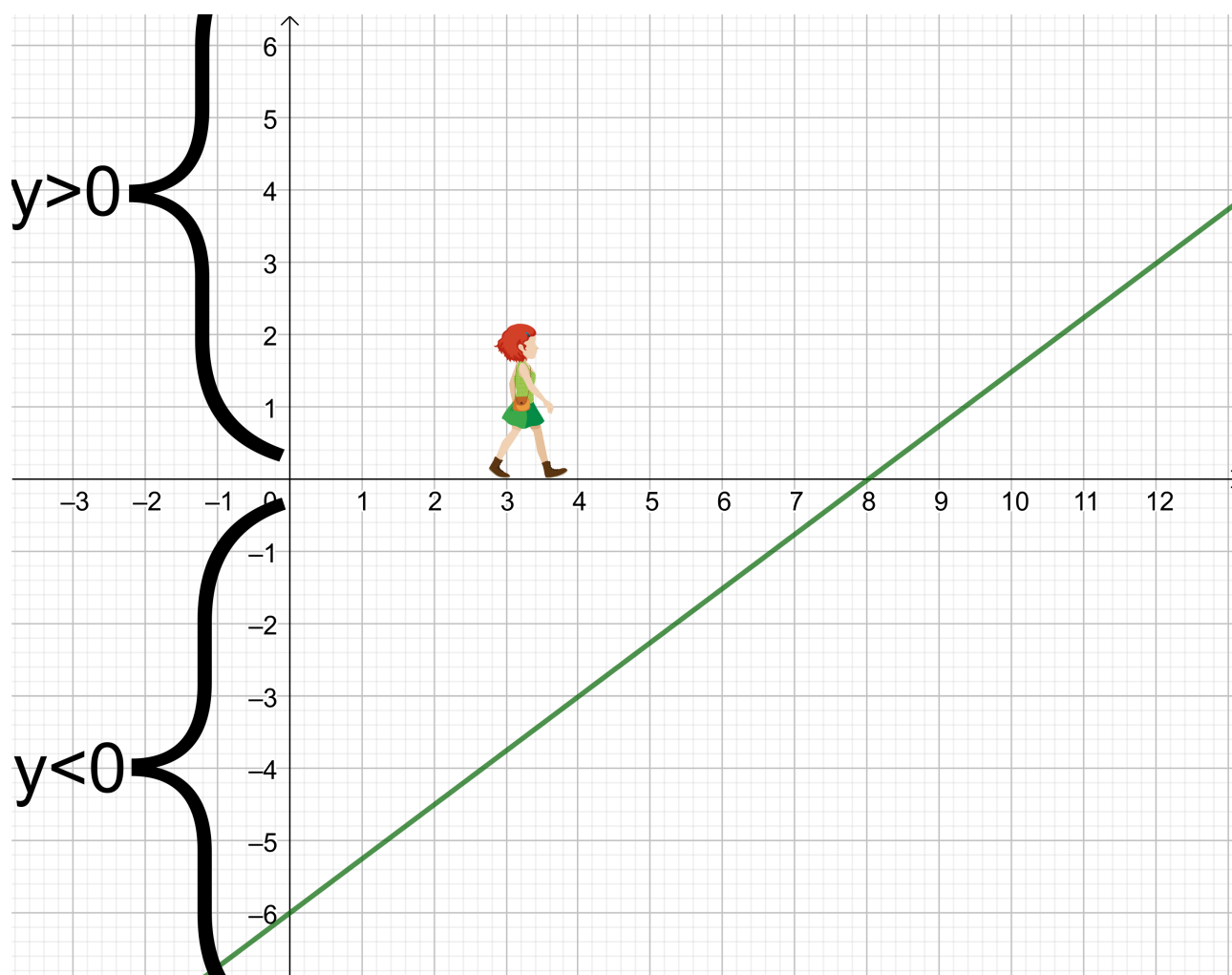
Les images se trouvent sur l'axe vertical, qui est orienté vers le haut.

Ainsi, lorsqu'une fonction est positive,

son graphique se trouve au-dessus de l'axe des x .

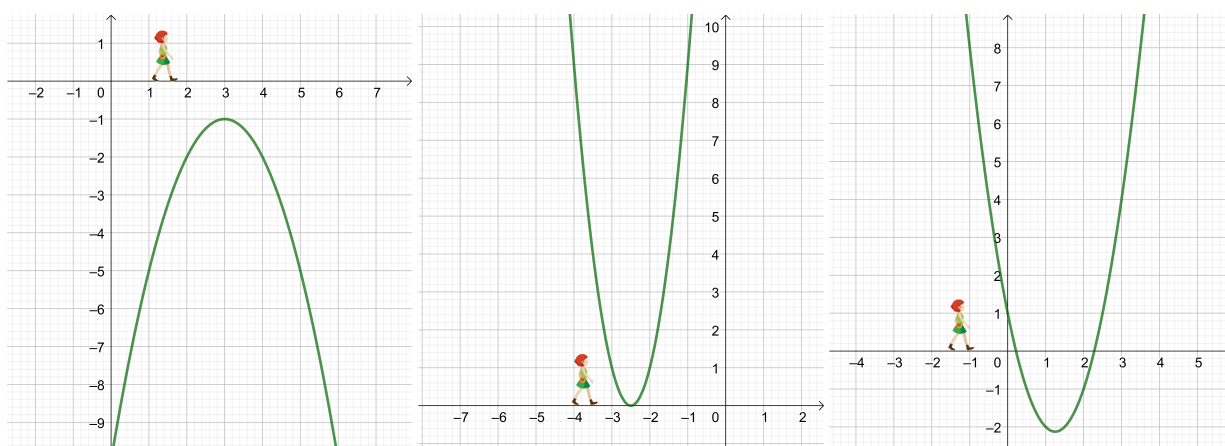
Lorsqu'une fonction est négative,

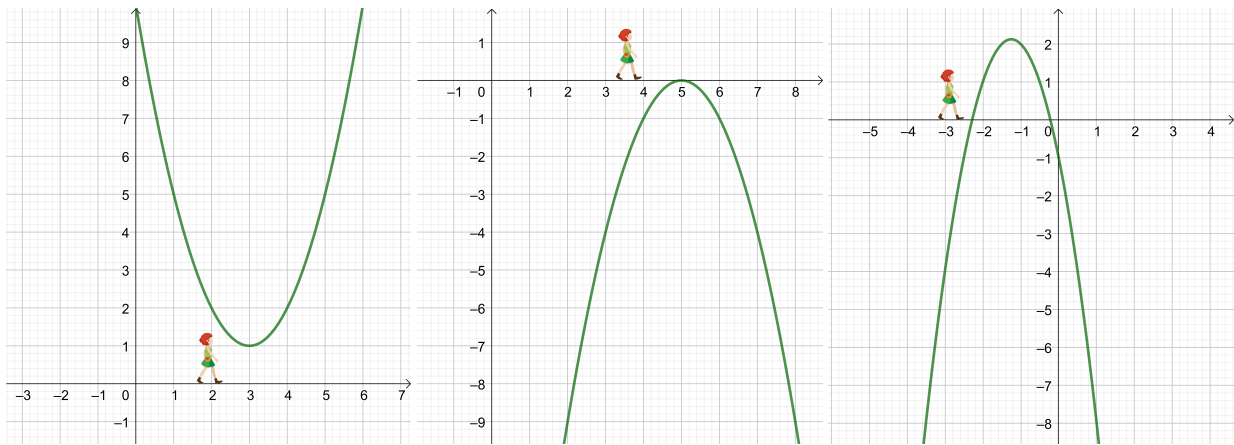
son graphique se trouve en dessous de l'axe des x .



Cette fonction est négative pour $x < 8$ et positive pour $x > 8$.

Pour une fonction du second degré, voici les 6 cas :





C'est un peu compliqué, 6 cas,
d'autant que je ne m'appelle pas 'J'ai 6 cas'.
Simplifions tout ça.

3

Pour une fonction du second degré :

signe de a partout, sauf entre les racines.

Et ça marche !

Exercice

4. Vérifie pour les 6 cas.

Nombre de racines	signe de a	signe de $f(x)$
2	+	+ 0 - 0 +

Exemples

• Étudions le signe de $x^2 + 5x + 6$.

$$\rho = 25 - 4 \cdot 6 = 1 \quad \text{2 racines : } \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{matrix} -3 \\ -2 \end{matrix}$$

$a > 0$

x					
$x^2 + 5x + 6$	+	-3 0	-	-2 0	+

• Étudions le signe de $2x^2 + 3x + 4$.

$$\rho = 9 - 4.8 = -23 \quad \text{pas de racine}$$

 $a > 0$

x	
$2x^2 + 3x + 4$	+

• Étudions le signe de $-x^2 + 4x - 4$.

$$\rho = 16 - 4.4 = 0 \quad 1 \text{ racine : } \frac{-4}{-2} = 2$$

 $a < 0$

x			
$x^2 + 5x + 6$	-	2 0	-

Exercices

5. Dresse le tableau de signe de

(a) $x^2 - 6x + 8$

(b) $x^2 + x - 1$

(c) $9x^2 + 24x + 16$

(d) $4x^2 - 16x$

(e) $18x^2 + 3x - 1$

(f) $x^2 - 5$

(g) $-x^2 + 2x + 5$

(h) $x^2 + \frac{x}{4} - \frac{3}{8}$

(i) $x^2 - x$

(j) $-x^2 - 25$

(k) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$

(l) $-x^2 + 6x - 9$

(m) $x^2 + x + 8$

6. Étudie et représente la fonction f (y compris le signe et les intersections avec les axes).

(a) $f(x) = -x^2 + 6x - 10$

(b) $f(x) = -4x^2 + 9$

(c) $f(x) = -4x^2 + 4x + 3$

(d) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$

(e) $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$

(f) $f(x) = \frac{3x^2}{2} + 3x + \frac{1}{2}$

7. (Ex 21) On considère l'ensemble A des nombres réels a pour lesquels l'expression

$a^2 - 9 - a - 3$ est strictement positive. Quel est l'ensemble A ?

Inéquations du deuxième degré

La résolution d'inéquations fait apparaître des ensembles contenant une infinité de nombres.

Voici un petit rappel.

Exercice

8. Complète le tableau

	Intervalle	Inégalité(s)	Signification
1)	$] -1; 5[$		
2)		$-8 \leq x < 11$	
3)			Ensemble des réels inférieurs à -5
4)	$] -1; 8]$		
5)		$-1 \leq x \leq 3$	
6)			Ensemble des réels inférieurs à -1 ou supérieurs ou égaux à 6
7)	$] -2; +\infty[$		
8)		$x < 7$	

Exemples

Réolvons

• $x^2 + 2x < 3$

$x^2 + 2x - 3 < 0$

x					
$x^2 + 2x - 3$		0		0	

Solutions :

• $x \cdot (x - 6) > 2 \cdot (x - 8)$

$x^2 - 6x > 2x - 16$

$x^2 - 8x + 16 > 0$

x			
$x^2 - 8x + 16$		0	

Solutions :

Exercice

9. Résous les inéquations suivantes.

(a) $-x^2 \geq x - 12$

(b) $25x^2 \leq 49$

(c) $x^2 - \sqrt{3}.x + 1 < 0$

(d) $4 - x^2 \leq x^2 - 2x$

(e) $9 - x^2 > x^2 + 3x$

(f) $x^2 + 1 \geq 9 - x^2$

(g) $2x > 2x^2 - 2x$

(h) $x^2 - x + 1 < 2x^2 - 3x + 2$

3.4 Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$

Somme et produit des solutions de l'équation du second degré

Propriété (théorème de Viète)

Quand $\rho \geq 0$, les deux solutions x_1 et x_2 de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ on pour

- somme $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- produit $P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$

Utilisation pour vérifier les solutions

Résoudre l'équation $5x^2 + 6x + 1 = 0$.

Solutions :

Somme des solutions : Est-ce bien $-\frac{b}{a}$?

Produit des solutions : Est-ce bien $\frac{c}{a}$?

Factorisation de $ax^2 + bx + c$

Synthèse

Factorise	↗	$\rho > 0$	$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$	où $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\rho}}{2a}$
	→	$\rho = 0$	$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1)^2$	où $x_1 = -\frac{b}{2a}$
	↘	$\rho < 0$	$ax^2 + bx + c$ est infactorisable.	

Exercices

1. Factorise, sans oublier la mise en évidence et les produits remarquables.

(a) $x^2 - 3x + 2$

(b) $6x^2 + 5x - 6$

(c) $8x^3 + 6x^2 - 5x - 3$

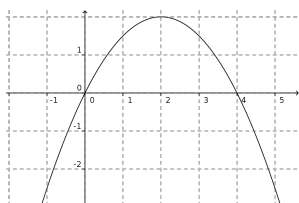
(d) $x^2 - 9$

(e) $2x^2 - 4x$

(f) $4x^2 - 20x + 25$

(g) $10x^3 - 3x^2 - 16x - 3$

2. (Ex 21) Considérons la parabole dont une portion est représentée ci-dessous.



Quelles sont les coordonnées du point d'abscisse 10 sur cette parabole ?

3. (Ex 22) Considérons l'équation suivante en x :

$$(ax)^3 - (ax)^2 + ax = 0$$

Pour quelle(s) valeur(s) réelle(s) de α existe-t-il des solutions autres que $x = 0$ pour cette équation ?

Chapitre 4

Statistique

Table des matières

1. Tableau brut - tableau ordonné
2. Diagrammes et graphiques

3. Indicateurs de position
4. Indicateurs de dispersion

Objectifs

CONNAÎTRE

- Expliquer le vocabulaire statistique.
- Identifier les différents types de caractères statistiques et décrire les informations graphiques et numériques qui peuvent y être associées.
- Expliquer pour quels usages sont requis les indicateurs de position (valeur centrale) ou de dispersion.

APPLIQUER

- Exploiter la relation entre effectifs, proportions et pourcentages.
- Calculer ou estimer les indicateurs de position et de dispersion et les positionner sur un graphique.
- Construire différents graphiques statistiques.

TRANSFÉRER

- Critiquer des informations graphiques, numériques, textuelles, ...
- Interpréter un résultat obtenu en lien avec le caractère étudié et le contexte, en particulier la moyenne et l'écart-type.



En plus des outils de « Tétramath », tu auras besoin d'une calculatrice avec mode STAT, d'un ordinateur avec LibreOffice (Calc) ou d'un smartphone avec Google Sheets (pas pour l'examen).



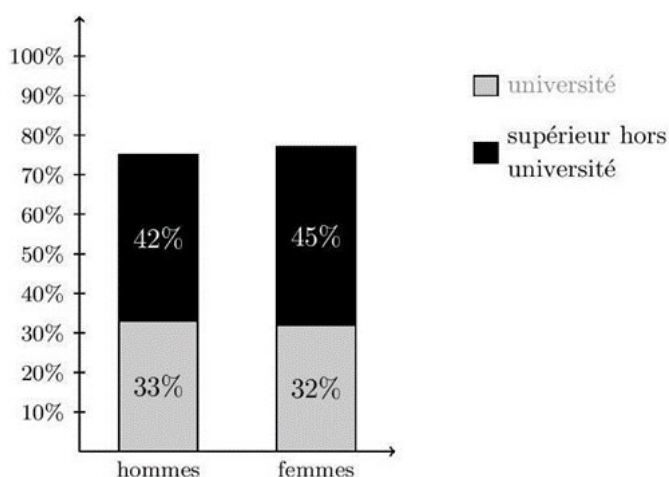
<http://tetramath.jean-luc-goffin.be/statistique>

4.0 Prérequis

1.

La moyenne de 3, 5, 10 et -6 est	16	5	0	3	6
La moyenne de 0, 2, 7 et -9 est	16	5	0	3	6
La moyenne de 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 7, 7 et 7 est	16	5	0	3	6
Le calcul $\frac{3.3 + 7.5 + 8.8}{18}$ donne	16	5	0	3	6

2. (Ex 23) Voici un graphique représentant le taux d'accès à l'enseignement supérieur des hommes et des femmes ayant obtenu un diplôme de secondaire.



Supposons que parmi les personnes ayant obtenu leur diplôme de secondaire, 60 % sont des femmes et 40 % des hommes.

Que vaut le taux d'accès (en %) à l'enseignement supérieur hors université parmi les personnes ayant obtenu un diplôme de secondaire ?

4.1 Tableau brut - tableau ordonné

Incursion



La statistique étudie les ensembles étendus de mesures.

Étendus comment ?

Ta taille (en cm) et celle de tes voisins, ce n'est pas très étendu. Celle de tous les élèves de ta classe, ça commence à être étendu. Celle de tous les élèves de ton année, c'est encore mieux.

Tu peux dire « les » statistiques.

4

Écris la taille de tous tes condisciples, sans leurs noms, par discrétion !

Le résultat est un tableau brut, très brut même, puisque ce n'est même pas un tableau.

C'est le résultat d'une (rapide) enquête, noté sur le vif.

Il y a trop de mesures pour les considérer individuellement.

L'**objet de la statistique descriptive** est de représenter sous forme de graphiques et de résumer à l'aide de quelques nombres significatifs les informations disponibles.

Ce résumé entraînera donc une perte d'information.

Avant de faire un graphique ou une moyenne avec les tailles de tes condisciples, il faut y mettre un peu d'ordre.

L'ensemble des élèves concernés s'appelle la population.

S'il y a des absents le jour du recensement des tailles, on dit qu'ils ne font pas partie de l'échantillon.

Si l'on mesurait la masse des colis postaux au départ du centre X, on parlerait aussi de population.

Chaque élément de la population est un individu.

Tableau ordonné



Dans ma population, il y a 80 élèves qui mesurent entre 150 cm et 177 cm.

Comment présenter cela dans un tableau ?

Pour être facile à lire et aussi assez détaillé, ce tableau devrait comprendre une dizaine de lignes.

$177-150=27$, cela se divise par 9. C'est parfait !

Classe	centre	effectif	fréquence	Effectif cumulé	Fréquence cumulée
[150; 153[	151	6	7,5%	6	
[153; 156[	154	7	8,75%	13	
[156; 159[	157	6	7,5%	19	
[159; 162[	160	8			
[162; 165[	163	10			
[165; 168[	166	16			
[168; 171[	169	12			
[171; 174[	172	8			
[174; 177]	175	7			
Total		80			

Remarque que les classes ont été choisies de sorte que chaque modalité appartienne à une et une seule classe.

Comme un de mes élèves mesure 177 cm, j'ai fermé le dernier intervalle.

Les centres de classe ont été choisis de manière pratique.

Le statisticien fait des synthèses, il y a donc perte d'information. De toutes façons, aucun élève de ma classe ne mesure 151,5 cm ! Le fait d'attribuer 151 comme centre de la première classe signifie que l'on considère que les 6 élèves de cette classe mesurent tous 151 cm.

La fréquence d'une classe est obtenue en divisant son effectif par l'effectif total.

Comment obtient-on l'effectif cumulé ?

La fréquence cumulée s'obtient en divisant l'effectif cumulé par l'effectif total.

Exercice

1. Cote d'un contrôle

Voici les cotes sur 10 obtenues au cours d'un contrôle de connaissances par les 112 élèves de 5^{ème} année d'une école.

6	8	4	6	5	7	8	5	6	4	8	9	5	8
4	7	4	6	5	7	10	5	6	5	4	8	4	6
9	8	6	8	4	7	7	5	4	5	6	6	6	1
4	8	7	4	4	7	3	5	8	8	4	3	6	5
3	6	4	2	7	6	10	6	7	8	9	6	7	7
5	4	5	6	5	4	9	8	4	2	3	6	2	4
7	7	9	5	7	5	8	2	3	7	4	9	7	6
2	5	6	6	1	3	1	3	5	4	6	10	5	2

Indique la population, un individu, l'échantillon, le caractère, le type de caractère, les modalités.

Dresse ensuite le tableau ordonné.

Donne la valeur de $n_6 =$ $f_3 =$ $N_9 =$ $F_6 =$

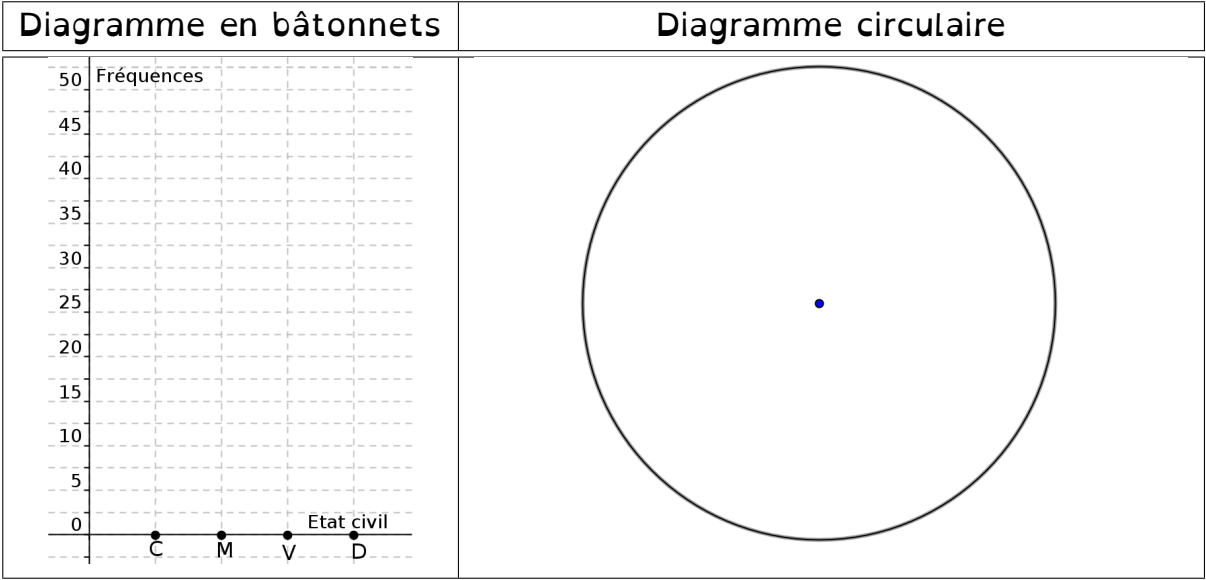
4.2 Diagrammes et graphiques

Caractère qualitatif (pour mémoire)

Voici l'état civil (Marié, Célibataire, Veuf, Divorcé) de 50 personnes.

Modalités x_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i
C	15	30%
M	22	44%
V	8	16%
D	5	10%
Total : $n = 50$		Total : 100%

Les graphiques privilégiés sont le diagramme en bâtonnets et le diagramme circulaire (camembert).



Caractère quantitatif

On réalisera généralement un diagramme pour les fréquences (ou effectifs) et un diagramme pour les fréquences cumulées (ou effectifs cumulés).

	Effectifs	Fréquences cumulées
Modalités simples	Diagramme en bâtonnets	Graphique en escalier ou polygone
Classes	Histogramme	Polygone

Exemples

Diagramme en bâtonnets

Reprends le tableau ordonné de l'exercice.

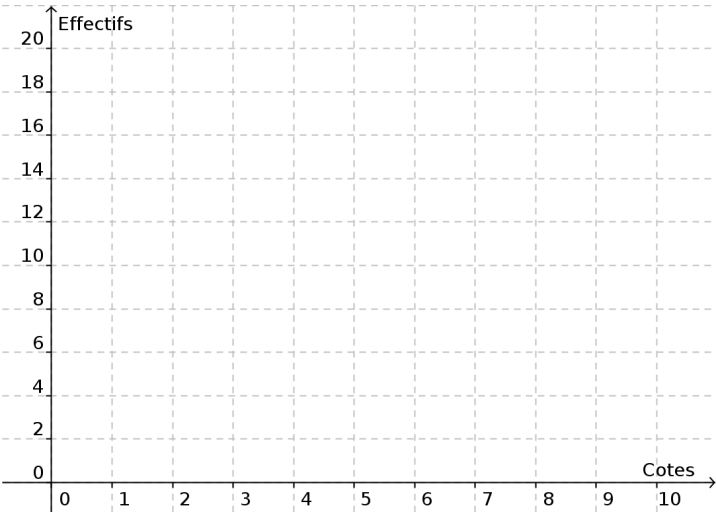
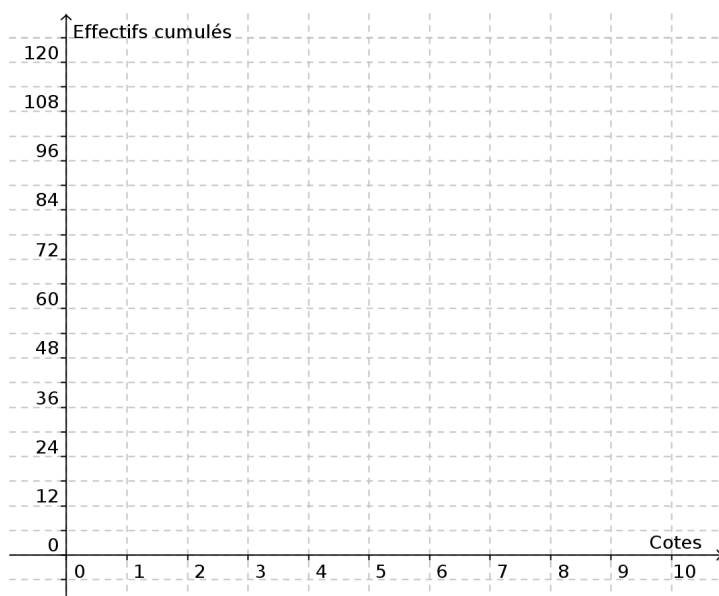


Diagramme en escalier



Pour le polygone des fréquences cumulées, l'abscisse est l'extrémité de la classe.

C'est un choix logique mais conventionnel.

4.3 Indicateurs de position

Le but de la statistique descriptive est d'obtenir un résumé, une synthèse, d'un ensemble étendu de mesures.

Quoi de plus résumé qu'un seul nombre ?

C'est le cas des indicateurs de position.

Un indicateur de position nous donne une idée du centre de la distribution, c'est-à-dire **d'une valeur autour de laquelle** les données sont réparties.



La moyenne vient tout de suite à l'esprit.
Mais il y a plus simple :
le mode
et plus subtil :
la médiane.

Le mode est la modalité la plus fréquente. S'il s'agit d'une classe, on prend son centre.

Le mode peut ne pas être unique.

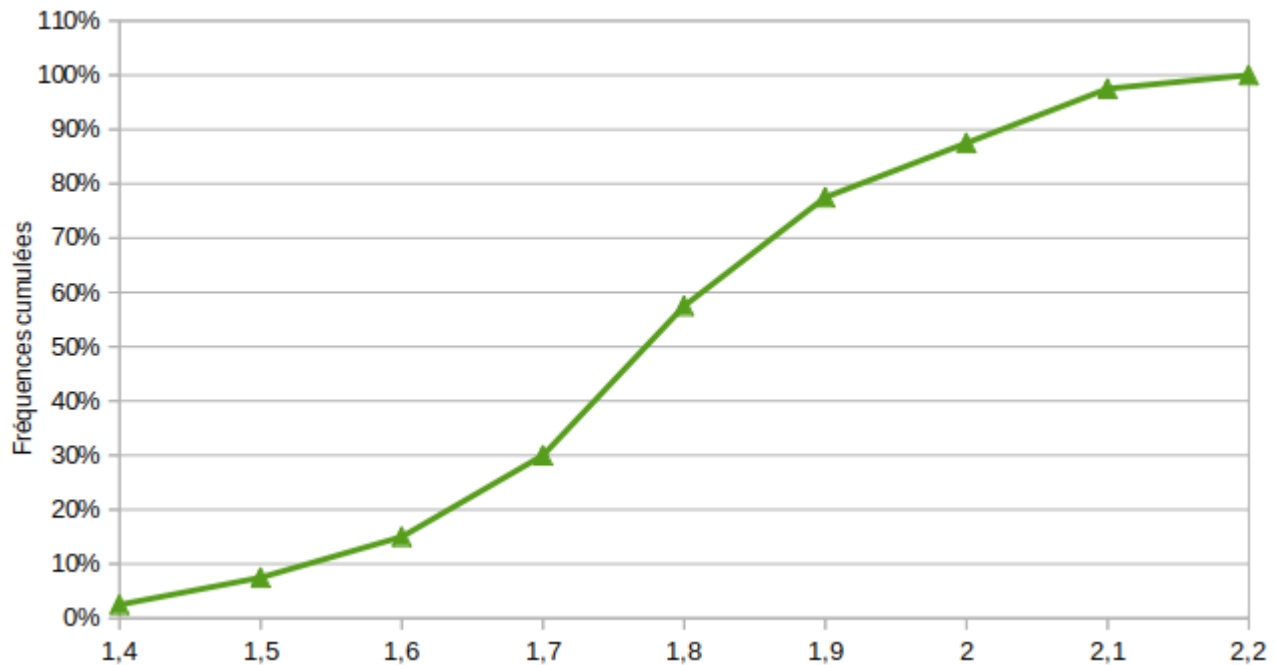
	mode
Taille des élèves	
Cote d'un contrôle	
État civil	

La médiane est la modalité telle que la moitié de la population ait une modalité inférieure.

Cela n'a de sens que pour un caractère quantitatif !

Pour la médiane, rien de tel que le polygone des fréquences cumulées.

Voici celui de la masse de colis postaux (en kg),



Pratiquement

Prends la droite horizontale $F_i = 50\%$.

Elle rencontre le graphique en un point dont x est... la médiane !

1,77 kg environ.

Cela signifie que 50% des colis postaux pèsent moins de 1,77 kg (et 50% pèsent plus).

Et la moyenne ?

Vérifie les résultats suivants à l'aide d'un logiciel.

Si tu ne sais pas le faire, lis la section 6.

	moyenne
Taille des élèves	
Cote d'un contrôle	5,6

En multipliant la moyenne par l'effectif total, on obtient la somme des modalités.

4.4 Indicateurs de dispersion

Un indicateur de position résume une série statistique par un seul nombre. C'est souvent un résumé ... trop résumé!

Par exemple, voici les cotes obtenues (sur 20) à trois contrôles par Sabine et Benoît :

Sabine	9	10	11
Benoît	0	10	20

Ces deux séries ont la même moyenne (à savoir 10) et la même médiane (à savoir 10). Cependant, elles diffèrent radicalement ; la seconde série paraît plus dispersée que la première qui semble plus groupée autour des valeurs centrales.

Plus les résultats sont dispersés, plus l'indicateur de dispersion est grand.

A chaque indicateur de position est associé un indicateur de dispersion qui précise comment sont réparties les mesures autour de cette valeur centrale.

Indicateur de position	Indicateur de dispersion
Mode	Étendue
Moyenne	Écart-type
Médiane	Écart inter-quartile

Étendue (pour mémoire)

La première idée qui vient à l'esprit est la différence entre la plus grande et la plus petite mesure : c'est l'étendue.

Elle n'a de sens que pour un caractère quantitatif.

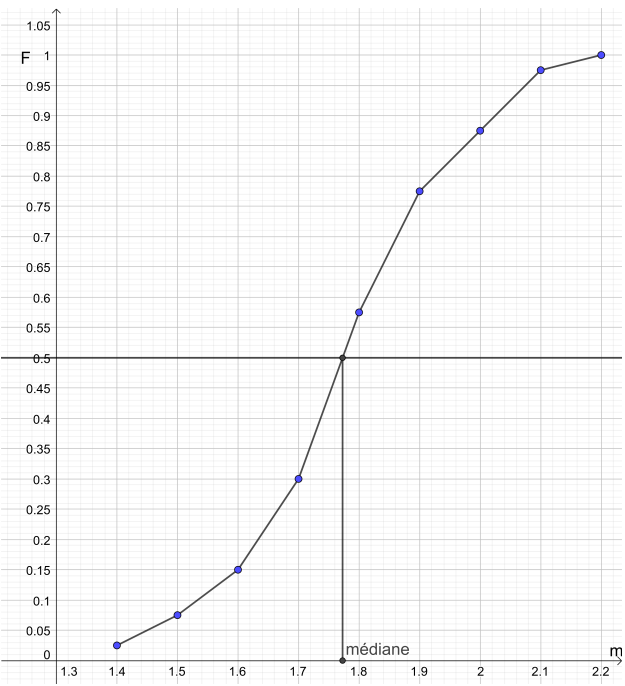
L'étendue est l'indicateur de dispersion associé au mode.

	mode	étendue
Taille des élèves		
Cote d'un contrôle	6	

Écart inter-quartile (pour mémoire)

Passons à la médiane.

Reprenons les colis postaux.



La médiane, 1,77 signifie que 50% des colis postaux pèsent moins de 1,77 kg.

Combien de kg faut-il pour que 25% des colis en pèsent moins ?

Combien de kg faut-il pour que 75% des colis en pèsent moins ?

Ce sont les quartiles Q_1 et Q_3 , parfois appelés $Q_{1/4}$ et $Q_{3/4}$.

L'écart-interquartile est la différence des deux.

	médiane	$Q_{1/4}$	$Q_{3/4}$	écart interquartile
Taille des élèves				
Colis postaux	1,77	1,67	1,88	
Cote d'un contrôle	5,3			

Remarque

Il faut, bien entendu, un caractère quantitatif.

Écart-type

Écarts à la moyenne

Pour associer un paramètre de dispersion à la moyenne $\bar{x}$, nous allons calculer les écarts entre chaque valeur (ou centre de classe) avec la moyenne : $x_i - \bar{x}$. Si nous en faisons la moyenne : $\frac{n_1 \cdot (x_1 - \bar{x}) + n_2 \cdot (x_2 - \bar{x}) + \dots + n_p \cdot (x_p - \bar{x})}{n}$, cela donne 0 !

La raison en est qu'il y a des écarts positifs et négatifs, ce qui entraîne des compensations. Ce n'est donc pas un bon paramètre de dispersion.

Variance

Pour éviter cela, faisons les carrés des écarts : $(x_i - \bar{x})^2$ et faisons-en la moyenne : $\frac{n_1 \cdot (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 \cdot (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p \cdot (x_p - \bar{x})^2}{n}$, cela donne un bon indice de dispersion appelé **variance** et noté V .

La variance a toutefois un défaut : son unité. Pour la taille des élèves, cela donne des cm^2 , pour les colis postaux, des kg^2 , ... Ce n'est pas pratique !

Écart-type

La solution est toute simple : prendre la racine carrée positive de la variance : c'est l'écart-type.

L'écart-type est le paramètre de dispersion associé à la moyenne.

Exercices

1. Complète

	moyenne	écart-type
Taille des élèves		
Cote d'un contrôle	5,6	

2. (Ex 21) On considère la série de données suivantes : 2 ; 4 ; 6 ; 8

(a) Calculez-en la moyenne et exprimez son écart-type.

(b) On ajoute une donnée à cette série. Parmi les données ci-dessous, quelle est celle qui fera diminuer l'écart-type ?

0 5 8 9

3. (Ex 22) Vous obtenez un écart-type pour une série de vingt données. Après vérification, deux de ces données paraissent erronées. On les retire de la série et on recalcule l'écart-type.

Comment va évoluer le nouvel écart-type sur les dix-huit données par rapport à l'ancien écart-type sur les vingt données ?

4. (Ex 24) Étant donné un nombre réel x , on considère les deux séries statistiques suivantes :

Série 1 : $x-2$; $x-1$; x ; $x+1$; $x+2$

Série 2 : x ; $x+1$; $x+2$; $x+3$; $x+4$

Comparez les écarts-types des deux séries.

Chapitre 5

Géométrie analytique plane

Table des matières

1. Points et vecteurs

2. Opérations sur les vecteurs

3. Équations d'une droite

4. Droites parallèles ou perpendiculaires

Objectifs

CONNAÎTRE

- Représenter un vecteur dans le plan.

APPLIQUER

- Construire la somme de deux vecteurs.
- Représenter un multiple de vecteur.
- Décomposer un vecteur selon deux directions données.
- Rechercher les équations vectorielle et cartésienne d'une droite.
- Rechercher une équation d'une droite comprenant deux points, comprenant un point et de direction donnée.
- Rechercher une intersection entre droites.

TRANSFÉRER

- Vérifier une propriété géométrique élémentaire par une méthode analytique.



En plus des outils de « Tétramath, la méthode », tu auras besoin d'une équerre - rapporteur.



<http://tetramath.jean-luc-goffin.be/geometrie>

5.0 Prérequis

Résous le système d'équations
$$\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ x - 2y = 5 \end{cases}.$$

Le but est que ces deux équations soient simultanément vraies.

La première est vraie si $x = -2$ et $y = 0$, ce qui se note $(-2; 0)$,

Mais la seconde est fausse $(-2 = 5)!$

La seconde est vraie si $x = 5$ et $y = 0$, ce qui se note $(5; 0)$,

Mais la première est fausse $(10 = -4)!$

Pour ne pas perdre notre temps,

nous allons utiliser la méthode des combinaisons.

Il s'agit de remplacer la première équation, trop compliquée,

par une somme de multiples des deux équations.

Tu peux utiliser n'importe quels multiples, mais l'intérêt est d'obtenir une équation simple, par exemple sans x .

Si la première équation reste inchangée ($\times 1$) et la seconde multipliée par -2 en les additionnant les x disparaissent !

$$\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \quad \begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array} \quad \begin{cases} (2x - 2x) \\ x - 2y = 5 \end{cases} \quad \text{Il faut faire la même chose avec les } y :$$

$$\begin{cases} (3y + 4y) \\ x - 2y = 5 \end{cases} \quad \text{et avec les termes indépendants : } \begin{cases} 7y = (-4 - 10) \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \\ x - 2y = 5 \end{cases} \quad \text{et il reste à remplacer dans la seconde équation : } \begin{cases} y = -2 \\ x - 2 \cdot (-2) = 5 \end{cases}$$

Nous obtenons la solution $(1; -2)$.

Tu peux la vérifier.

Résous le système d'équations
$$\begin{cases} y = 2x + 7 \\ y = -x + 1 \end{cases}.$$

La méthode des combinaisons fonctionne. En voici une autre :

$$\begin{cases} -x + 1 = 2x + 7 \\ y = -x + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x = 6 \\ y = -x + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 + 1 \end{cases}$$

Nous obtenons la solution $(-2; 3)$.

Tu peux la vérifier.

Exercices

1. Résous les systèmes suivants par la méthode des combinaisons.

(a) $\begin{cases} 2x - 3y = -3 \\ x - 4y = -1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 5x - 2y = -3 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$

2. Résous les systèmes suivants par substitution.

(a) $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = x + 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y = -3x + 4 \\ y = 5x - 12 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 5x - 2y = -3 \\ y = x - 1 \end{cases}$

3. Résous les systèmes suivants par la méthode de ton choix.

(a) $\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y = x + 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y - 3x = -5 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x + y = -5 \\ y = -3x + 3 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 4x - 2y = -3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

4. (Ex 21) Ma voiture consomme 6 litres de carburant par 100 km lors de trajets en ville et 4 litres par 100 km lors de trajets hors ville. Le tableau suivant fournit le récapitulatif des distances, exprimées en km, parcourues en ville et hors ville lors de trois trajets, notés 1, 2 et 3.

	En ville	Hors ville
Trajet 1	x km	300 km
Trajet 2	5 km	y km
Trajet 3	15 km	200 km

Ma voiture a consommé 42,4 litres de carburant pour effectuer les trois trajets et 32 litres pour effectuer les parties hors ville des trajets 1 et 2.

Que valent x et y ?

5. On considère le système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ -ax + dy = -c \end{cases} \quad \text{où les inconnues } x \text{ et } y \text{ sont des nombres réels}$$

et où les nombres réels a, b, c et d sont non nuls.

Combien de solutions admet ce système ?

6. Étant donné un paramètre β réel, on considère la système suivant :

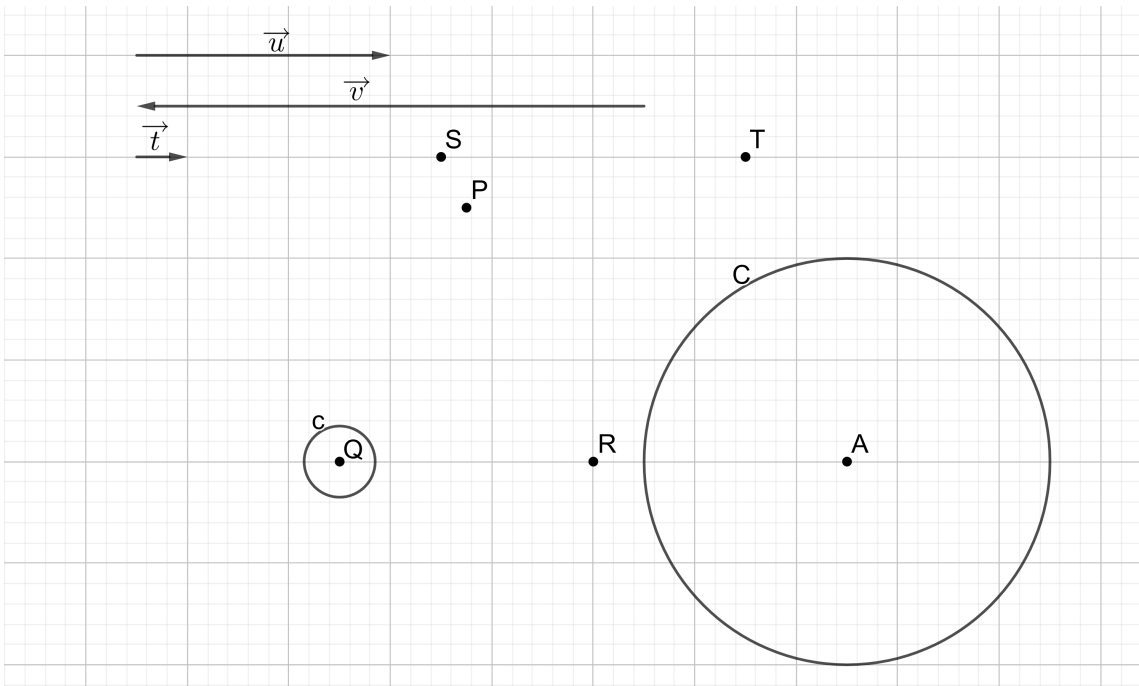
$$\begin{cases} \beta x + \beta y = 1 \\ 1 + \beta y = 1 \end{cases}$$

Combien de solutions admet ce système ?

7. La translation $\overrightarrow{QP}$ est la translation qui applique le point Q sur le point P.

Construis les figures demandées.

- (a) Le segment $[QP]$ et son image par la translation $\overrightarrow{u}$.
- (b) Le segment $[QR]$ et son image par la translation $\overrightarrow{QP}$.
- (c) L'image du cercle C par la translation $\overrightarrow{v}$.
- (d) L'image du point S par la translation $\overrightarrow{t}$.
- (e) L'image du point T par la translation $-\overrightarrow{t}$.
- (f) L'image du cercle c par la translation $\overrightarrow{u}$.
- (g) Trace les segments $[PS]$, $[SS']$, $[P'T]$ et $[TT']$.

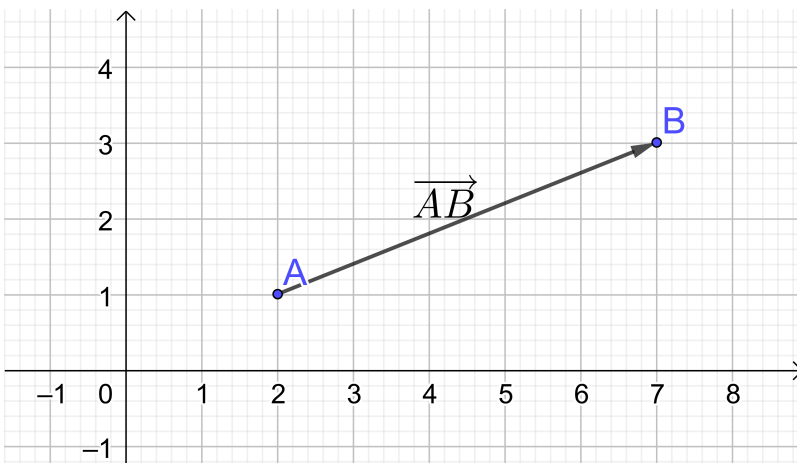


5.1 Points et vecteurs

Un vecteur est formé de deux points et un ordre.

Ainsi, les points A et B définissent les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$.

A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$; B en est l'extrémité.



La notion de **vecteur** est identique à la notion de **translation** ou de **déplacement** de A en B .

Tout ce qui se trouve entre A et B n'a aucune importance. Seuls comptent A (l'origine) et B (l'extrémité).

Dans le dessin ci-dessus, le vecteur va de $A(2; 1)$ à $B(7; 3)$.

Il faut donc ajouter 5 à la première coordonnée de A

et 2 à la deuxième coordonnée de A pour obtenir B .

$(5; 2)$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont les nombres qu'il faut ajouter aux coordonnées de A pour obtenir les coordonnées de B .

Autrement dit, les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

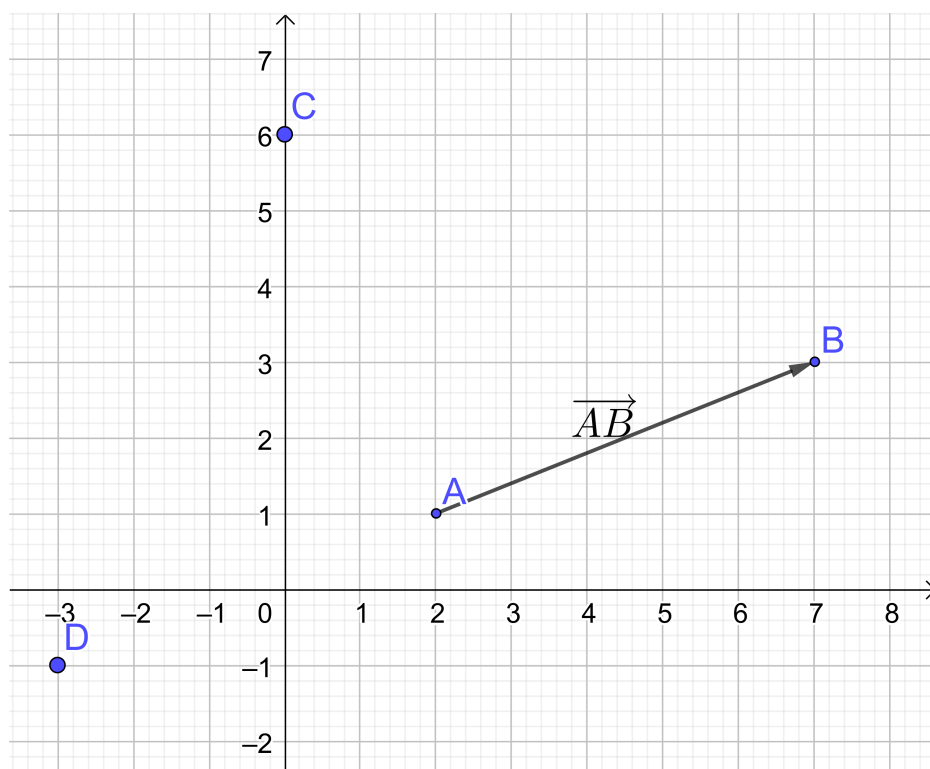
La distance entre A et B peut être obtenue par le théorème de Pythagore :

$[AB]$ joue le rôle de l'hypoténuse et les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes.

Cela donne : $|AB|^2 = 5^2 + 2^2$

$$|AB| = \sqrt{29}$$

La distance entre A et B est appelée la **norme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Détermine les composantes et la norme des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ont la même

Pourtant, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'ont pas la même

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ont la même direction mais n'ont pas le même

Celui-ci est vraiment nul !

Le vecteur dont l'extrémité est égale à l'origine est appelé vecteur nul.
Il se note $\overrightarrow{AA}$ ou $\vec{0}$.

Ses composantes sont $(0; 0)$.

Sa norme est 0.

Il n'a ni sens, ni direction.

Le vecteur existe aussi en version hybride

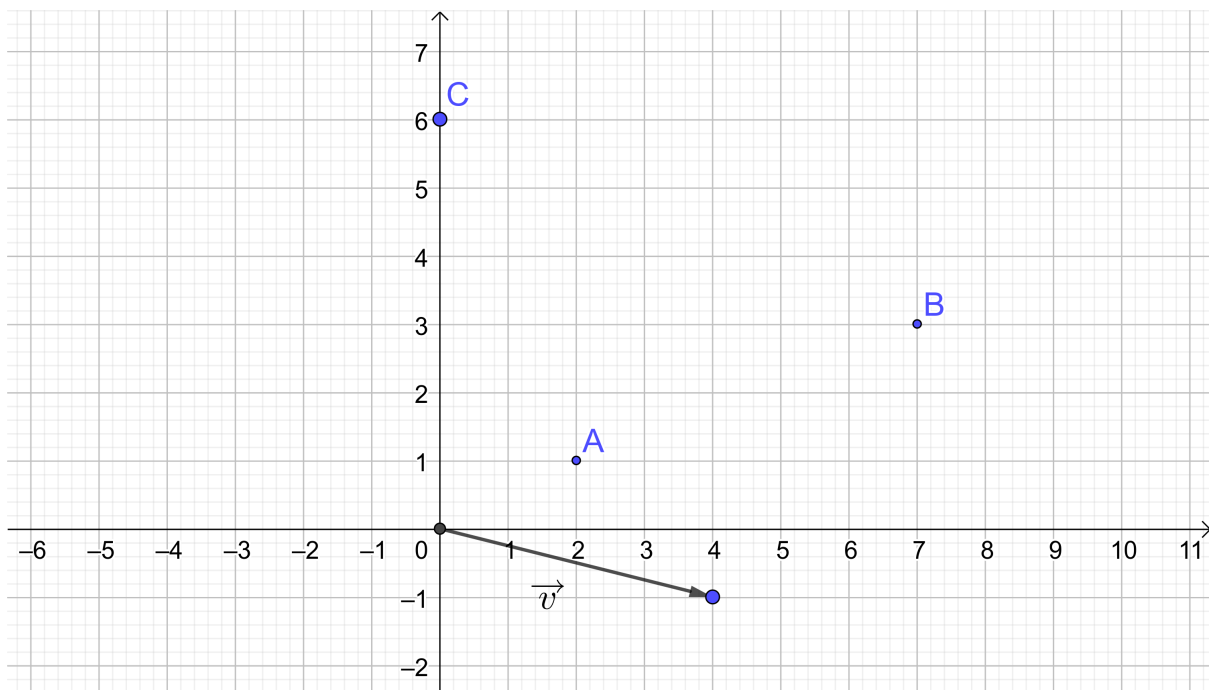
Prenons le vecteur $\vec{v}$ de composantes $(4; -1)$.

Son job est d'ajouter 4 horizontalement (x) et -1 verticalement (y).

Et ça marche avec n'importe quel point !

Pour me simplifier la vie, je l'ai tracé avec origine $(0; 0)$.

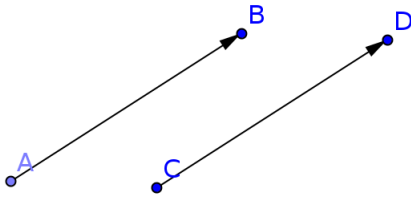
Trace-le avec les points A et B comme origine et le point C comme extrémité (3 vecteurs).



Deux vecteurs qui ont les mêmes composantes sont **égaux**.

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** s'ils sont nuls tous les deux ou s'ils ont même direction, même sens et même norme.

On écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Cela fait deux fois « égaux ».
Est-ce bien normal ?

Le vecteur est une notion de géométrie (deux points et un sens) et d'algèbre (composantes).

C'est donc un objet hybride qui n'a pas fini de nous étonner.

En algèbre, il y a des opérations et en géométrie des constructions. Étrange...

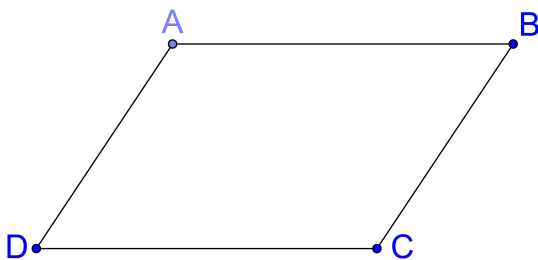
Propriété

Soient A , B , C et D quatre points du plan non alignés 3 à 3.

$ABCD$ est un parallélogramme

si et seulement si

ou



Vecteurs opposés

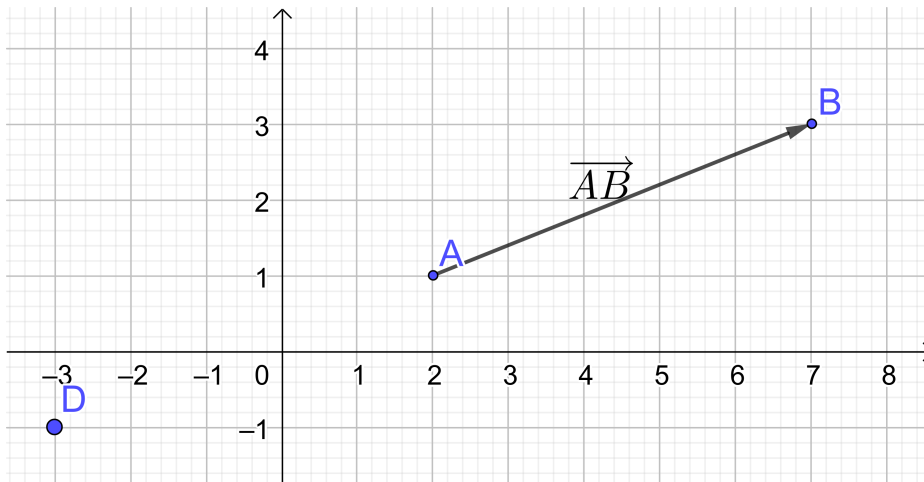
Un vecteur est formé de deux points et un ordre.

Ainsi, les points A et B définissent les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{BA}$ est le vecteur opposé de $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}$ est le vecteur opposé de $\overrightarrow{BA}$.

On note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.



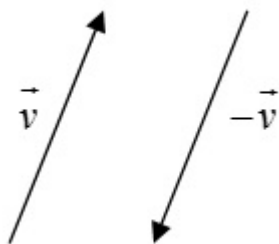
Sur la figure, $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AD}(-5; -2)$ et $\overrightarrow{AB}(5; 2)$.

Deux vecteurs opposés ont des composantes opposées.

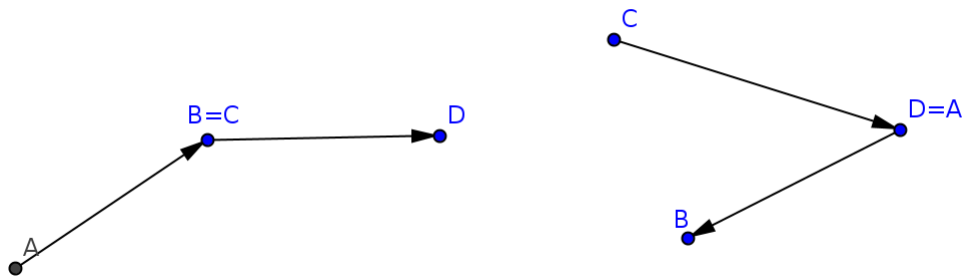
Géométriquement : Deux vecteurs sont opposés lorsqu'ils ont même direction et même norme mais sont de sens opposés.

L'opposé du vecteur $\vec{v}$ sera noté $-\vec{v}$.



Vecteurs consécutifs

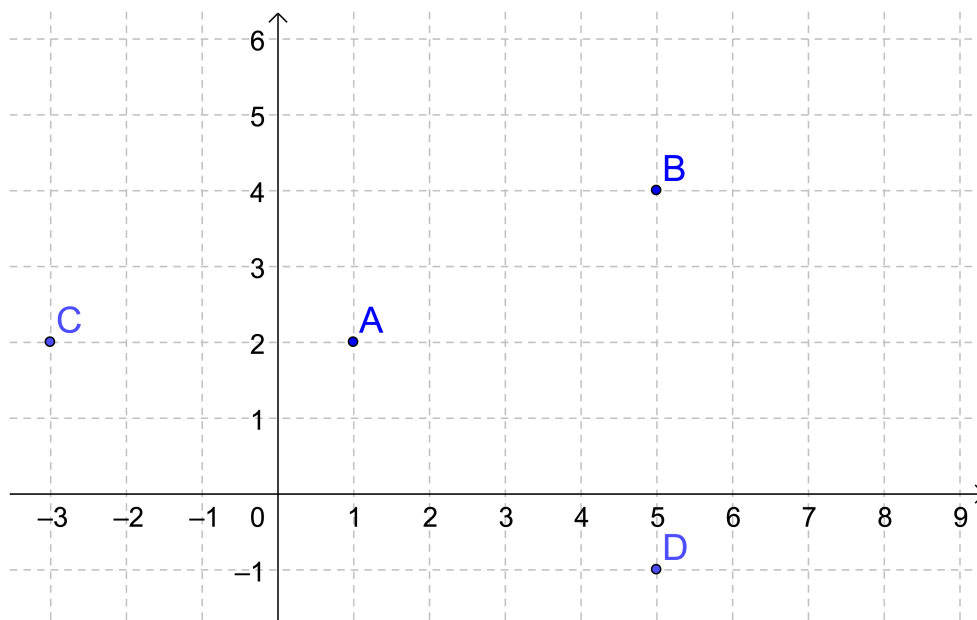
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont consécutifs lorsque l'extrémité de l'un coïncide avec l'origine de l'autre, c'est-à-dire lorsque $B = C$ ou lorsque $D = A$.



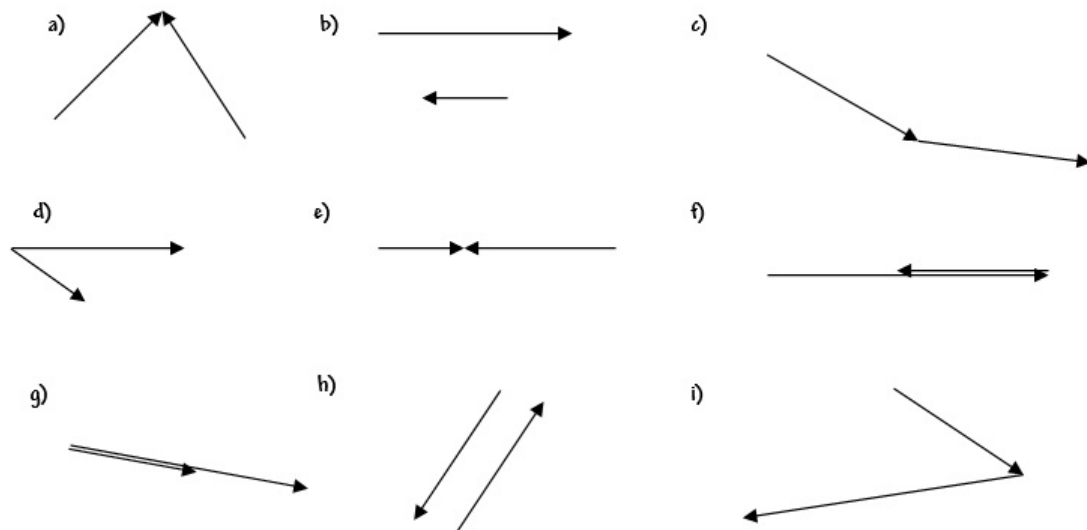
Exercices

1. Détermine les composantes et les normes des vecteurs

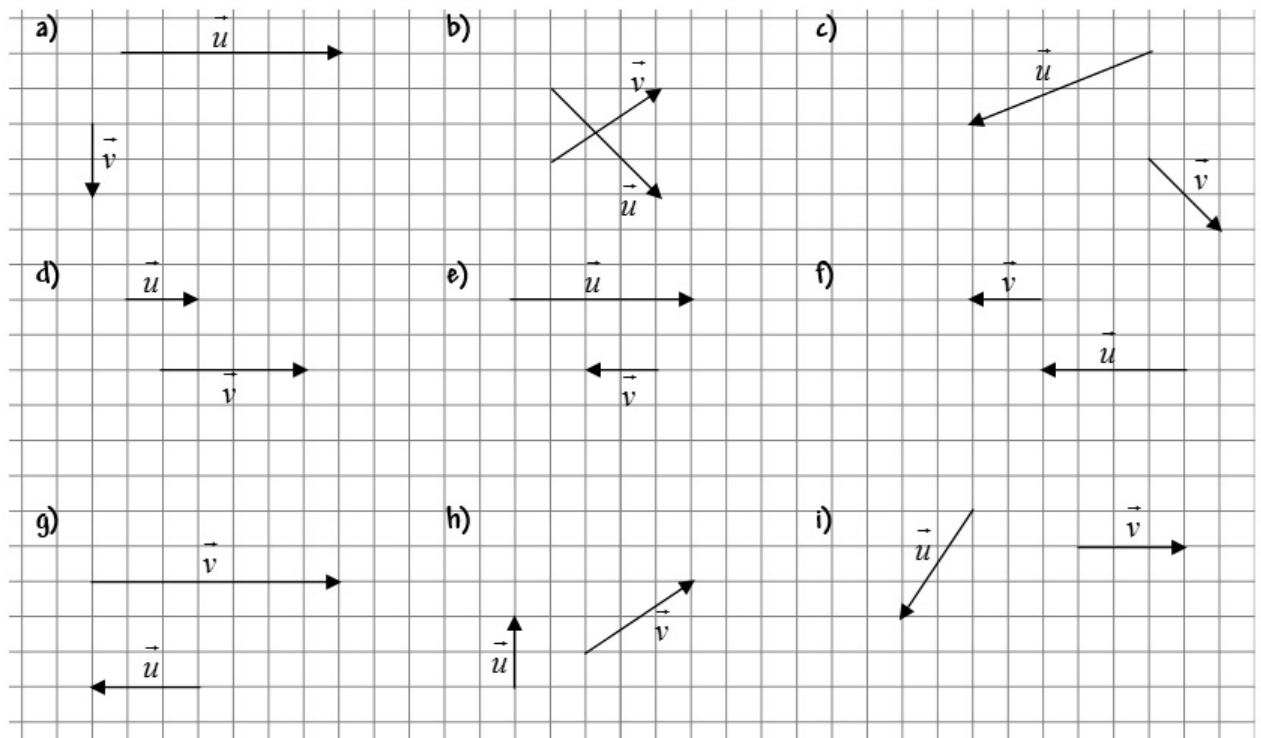
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CB}$.



2. Donne avec précision la position relative (origine, extrémité, consécutifs, direction, sens, norme) des deux vecteurs donnés.

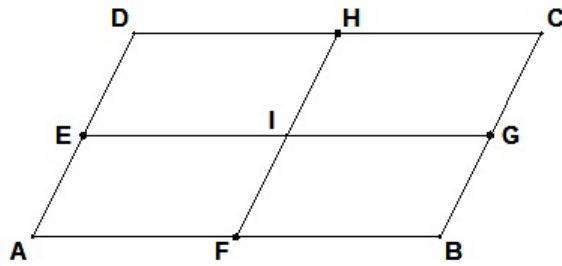


3. Construis le vecteur égal à $\vec{v}$ qui est consécutif au vecteur $\vec{u}$.



4. Voici un parallélogramme et ses médianes.

En utilisant les points indiqués, cite tous les vecteurs égaux à :



$$\overrightarrow{AB} =$$

$$\overrightarrow{CB} =$$

$$\overrightarrow{HI} =$$

$$\overrightarrow{EF} =$$

$$\overrightarrow{AA} =$$

5. Dans un repère, $A(2; 3)$, $B(-4; 5)$, $C(-3; -4)$ et $D(5; -1)$.

(a) Calcule les composantes des vecteurs

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{BB}.$$

(b) Calcule $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{BD}\|$.

6. Si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a comme composantes $(-5; 2)$,
trouve les coordonnées de

(a) A si $B(-1; 3)$

(b) B si $A(0; 4)$

7. Dans chaque cas, détermine les coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

(a) $A(2; -4)$, $B(-1; 3)$ et $C(6; 2)$

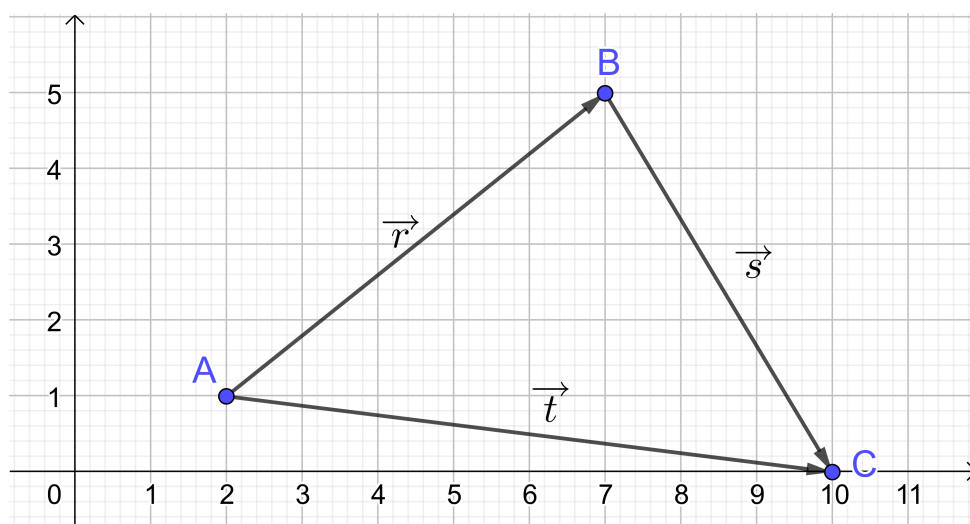
(b) $A(-\frac{3}{2}; \frac{5}{3})$, $B(1; -2)$ et $C(\frac{7}{2}; 1)$

5.2 Opérations sur les vecteurs

Le vecteur est un objet à la fois de l'algèbre et de la géométrie.



Relation de Chasles¹



Pour tous points A, B, C ,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Cette relation exprime que le déplacement de A à B suivi du déplacement de B à C donne le déplacement de A à C .

¹Michel Chasles, 1793 - 1880, fut le premier professeur de géométrie supérieure à l'académie des sciences de Paris.

Cette relation est un mélange subtil d'algèbre (+ =) et de géométrie (A B C).
 Seul le vecteur permet de faire cela.
 On n'additionne pas des droites et on ne fait pas d'intersection de nombres !

Composantes

Cette relation fonctionne aussi sur les composantes des vecteurs.

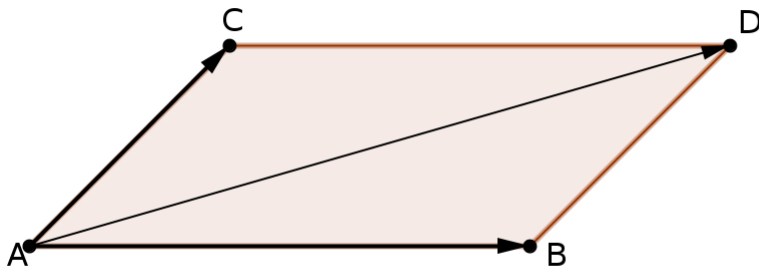
 $\overrightarrow{AB}$
 $\overrightarrow{BC}$
 $\overrightarrow{AC}$

Généralisation

Toute opération sur les vecteurs
 donne la même opération sur les composantes.
 Les vecteurs ont été inventés pour ça !

Règle du parallélogramme

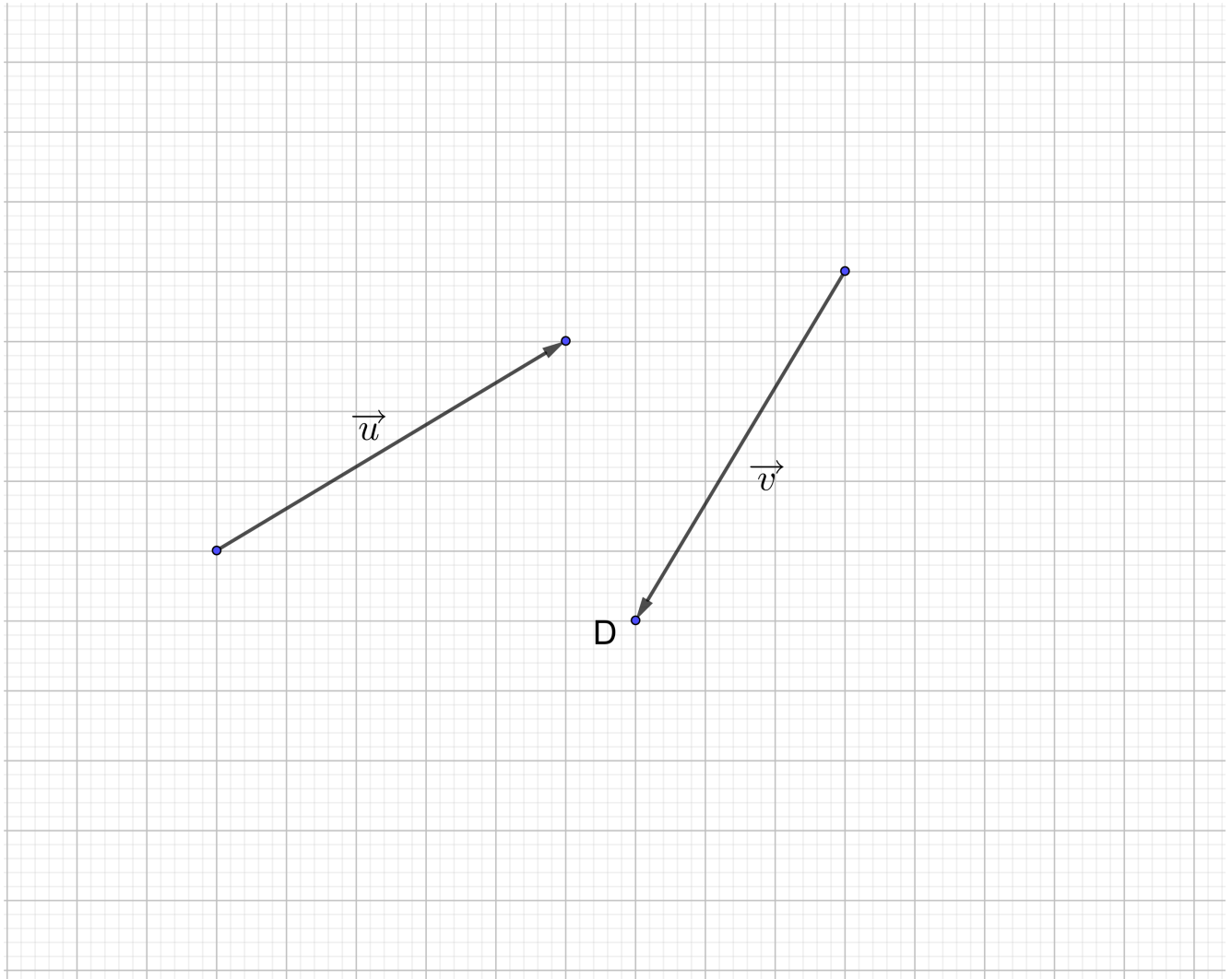
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs de même origine,
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D est le quatrième sommet du parallélogramme $ABDC$.



Construction de la somme de 2 vecteurs quelconques

Additionne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Ensuite, additionne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de sorte que la réponse soit un vecteur d'origine D .



Soustraction de deux vecteurs

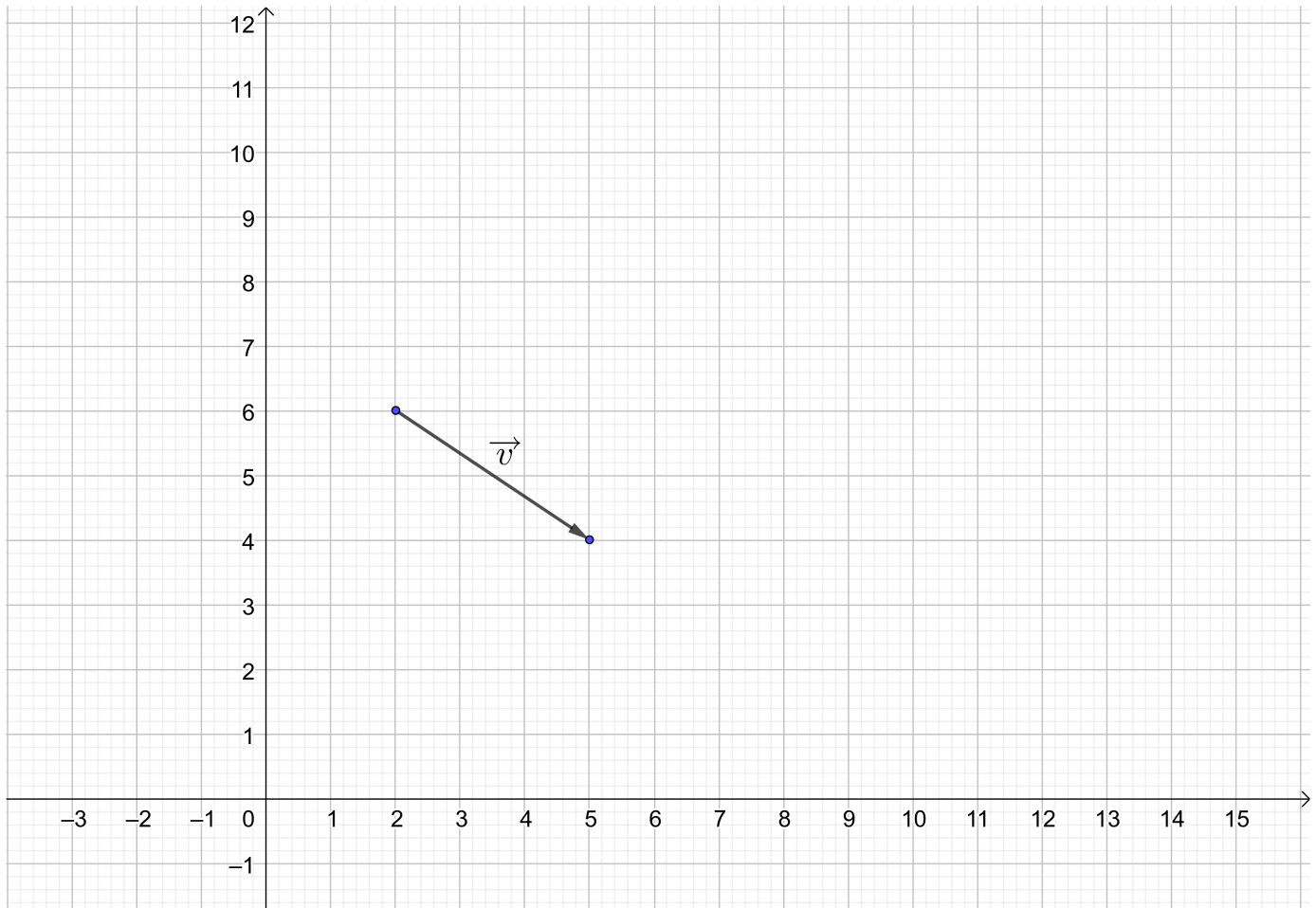
Soustraire un vecteur à un autre revient à lui additionner son opposé.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

Multiplication d'un vecteur par un réel

Voici le vecteur $\vec{v} (3; -2)$.



Puisque les opérations sur les vecteurs

donnent les mêmes opérations sur les composantes, nous obtenons

$$3\vec{v} (9; -6)$$

$$-2\vec{v} (-6; \quad)$$

$$\frac{1}{2}\vec{v} (\quad; \quad)$$

Dessine ces vecteurs.

Vecteurs parallèles

Deux vecteurs sont parallèles ssi l'un est multiple de l'autre.

En particulier, le vecteur nul est parallèle à tout vecteur.

Vecteurs parallèles et composantes

Dans un repère du plan, le vecteur $\vec{u}(x_u; y_u)$ est parallèle au vecteur $\vec{v}(x_v; y_v)$ ssi les composantes de l'un sont multiples des composantes de l'autre.

Si les vecteurs sont non nuls, cela revient à dire que leurs composantes sont proportionnelles : $\vec{u} // \vec{v} \iff \frac{x_u}{y_u} = \frac{x_v}{y_v}$.

Exemple

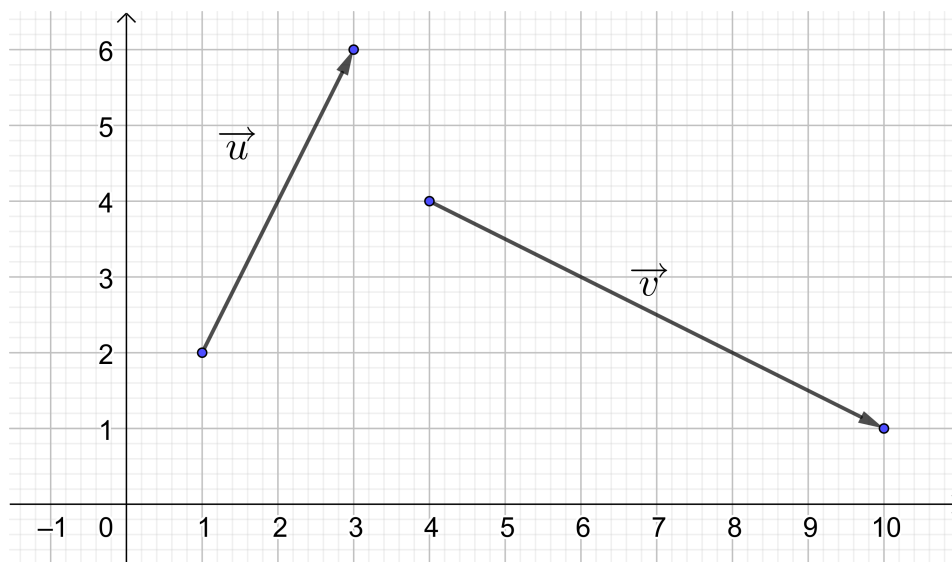
Les vecteurs $\vec{u}(-1; 3)$ et $\vec{v}(2; -6)$ sont parallèles car $\vec{v} = -2 \cdot \vec{u}$
 $(2; -6) = -2 \cdot (-1; 3)$.

Vecteurs orthogonaux

Définition

Deux vecteurs sont orthogonaux si leurs directions forment un angle droit.

Notation : $\vec{u} \perp \vec{v}$



Les vecteurs $\vec{u}(2; 4)$ et $\vec{v}(6; -3)$ sont orthogonaux.

En écrivant leurs composantes comme ceci
 (pente d'une fonction du premier degré)

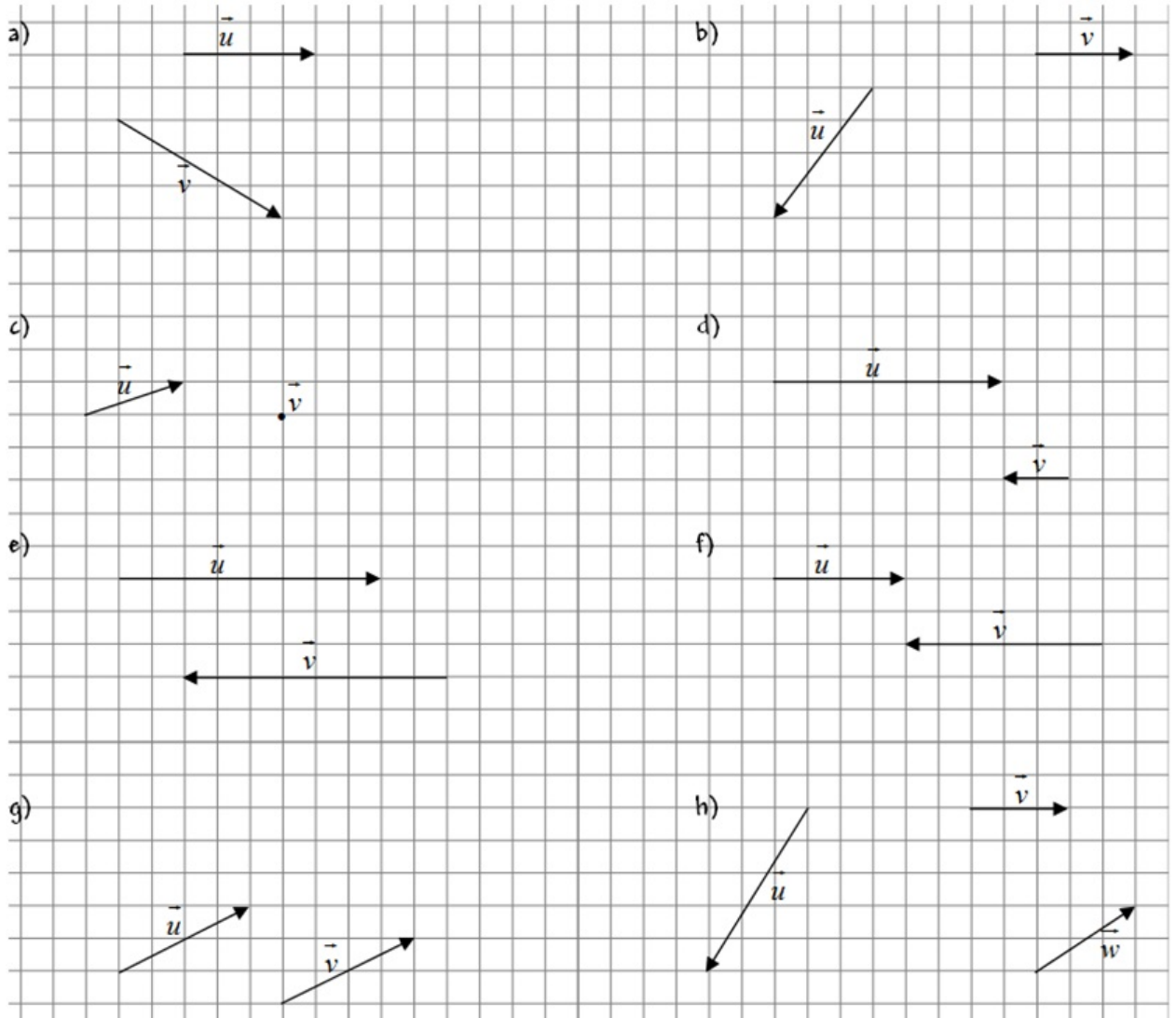
	$\vec{u}$	$\vec{v}$
y	4	-3
x	2	6

nous nous apercevons que $4 \cdot (-3) + 2.6 = 0$.

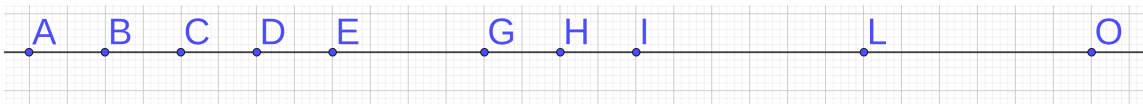
c'est-à-dire $y_u \cdot y_v + x_u \cdot x_v = 0$ ou encore $x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v = 0$

Exercices

1. Additionne les vecteurs qui te sont proposés.



2. Complète les égalités suivantes.



(a) $\overrightarrow{AE} = \quad \overrightarrow{AB}$

(b) $\overrightarrow{GD} = \quad \overrightarrow{IO}$

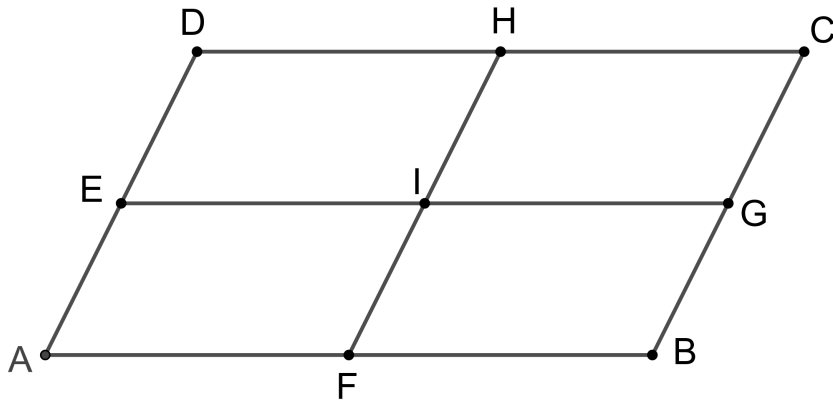
(c) $\overrightarrow{CL} = \quad \overrightarrow{EB}$

$$(d) \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OE}$$

$$(e) \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{LG}$$

$$(f) \overrightarrow{NF} = \overrightarrow{IE}$$

3. Soit $ABCD$ un parallélogramme, F le milieu de $[AB]$, G le milieu de $[BC]$, H le milieu de $[CD]$, E le milieu de $[AD]$ et I l'intersection des médianes.



Construis :

$$(a) \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{IF}$$

$$(b) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CI}$$

$$(c) \overrightarrow{DH} - \overrightarrow{BF}$$

$$(d) \overrightarrow{EI} - \overrightarrow{IA}$$

$$(e) 2\overrightarrow{HC}$$

$$(f) -2\overrightarrow{ID}$$

$$(g) \overrightarrow{EI} + 2\overrightarrow{BD}$$

$$(h) 2\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{DI}$$

Complète :

$$(a) \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{C...} = \overrightarrow{D...}$$

$$(b) \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{GF} =$$

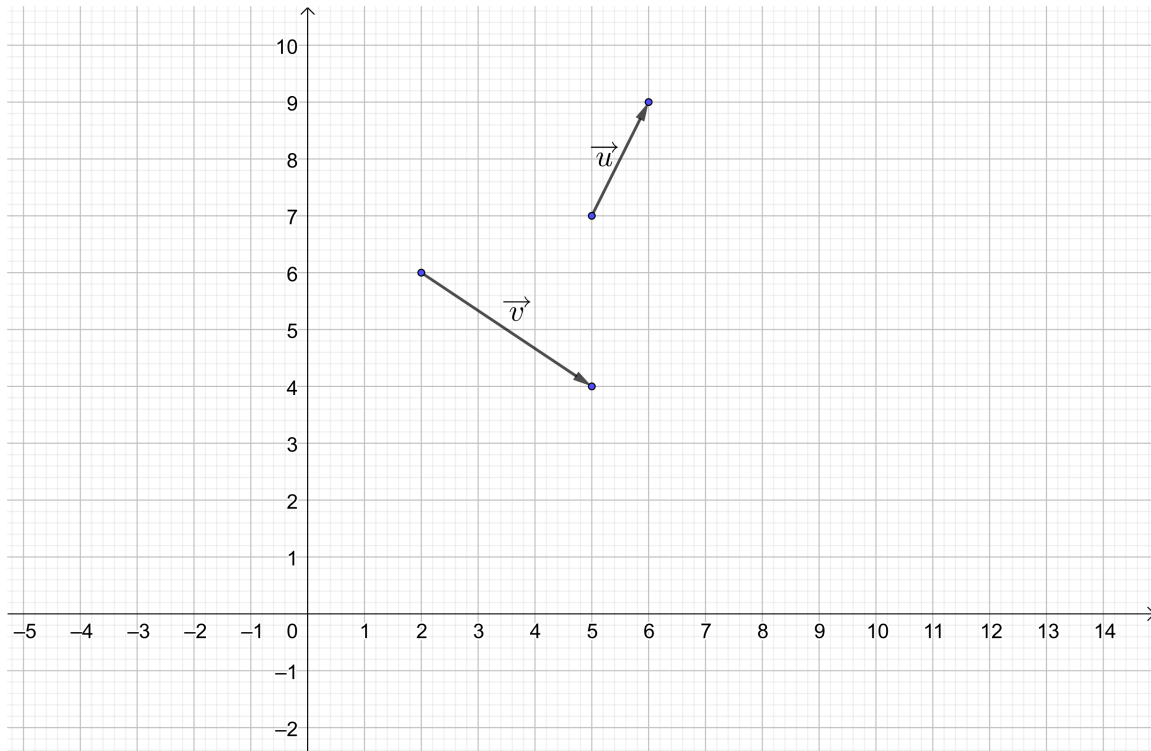
$$(c) \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B...}$$

$$(d) \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{C...}$$

$$(e) \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AC} =$$

$$(f) \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DI} - \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{HI} =$$

4. Détermine les composantes des vecteurs



(a) $\vec{u} + \vec{v}$

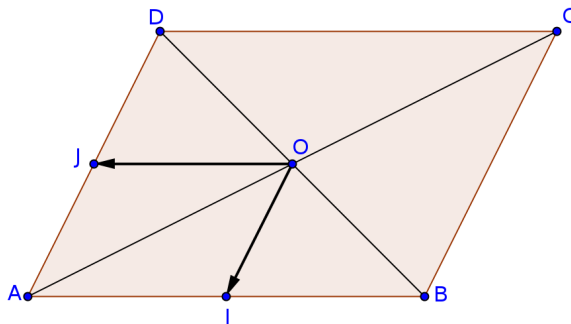
(b) $\vec{v} - 2\vec{u}$

(c) $2\vec{u} - \vec{v}$

(d) $5\vec{u} - 3\vec{v}$

(e) $\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{3}{4}\vec{v}$

5. Dans le parallélogramme $ABCD$, exprime chaque vecteur comme somme de multiples des vecteurs $\vec{OI}$ et $\vec{OJ}$.



(a) $\vec{IA} =$

(b) $\vec{AB} =$

(c) $\vec{AJ} =$

(d) $\overrightarrow{BC} =$

(e) $\overrightarrow{OA} =$

(f) $\overrightarrow{AC} =$

(g) $\overrightarrow{DO} =$

(h) $\overrightarrow{BD} =$

6. Détermine les composantes des vecteurs $\vec{t}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ parallèles au vecteur $\vec{u}$.

(a) $\vec{u} (1; -2)$ $\vec{t} (\quad ; \quad)$ $\vec{v} (-3; \quad)$ $\vec{w} \left(\quad ; \frac{1}{2} \right)$

(b) $\vec{u} \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3} \right)$ $\vec{t} (\quad ; \quad)$ $\vec{v} (-3; \quad)$ $\vec{w} \left(\quad ; \frac{1}{2} \right)$

7. Détermine les composantes des vecteurs $\vec{t}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ orthogonaux au vecteur $\vec{u}$.

(a) $\vec{u} (1; -2)$ $\vec{t} (\quad ; \quad)$ $\vec{v} (-3; \quad)$ $\vec{w} \left(\quad ; \frac{1}{2} \right)$

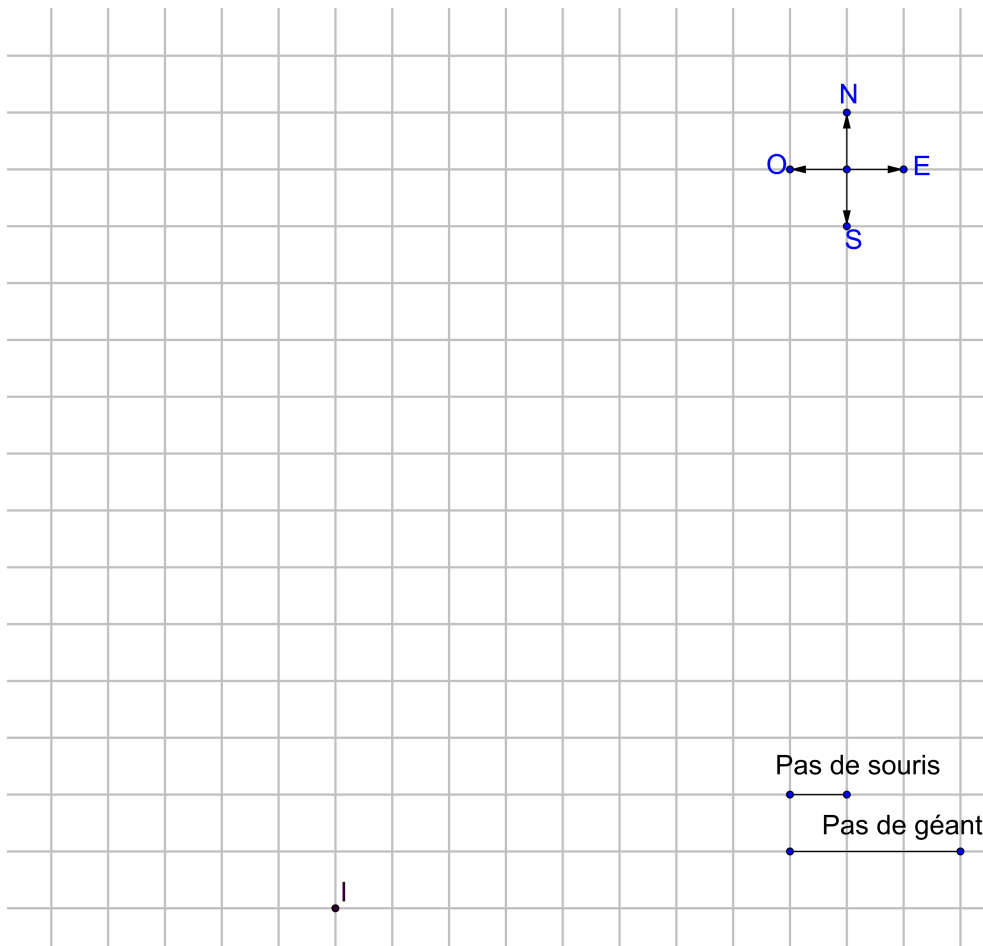
(b) $\vec{u} \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3} \right)$ $\vec{t} (\quad ; \quad)$ $\vec{v} (-3; \quad)$ $\vec{w} \left(\quad ; \frac{1}{2} \right)$

8. Le trésor du pirate est enterré dans une île déserte.

Indiana sait qu'il doit parcourir 3 pas de géant vers le nord, 7 pas de souris vers l'est, puis 3 pas de souris vers le sud et enfin 4 pas de géants vers l'ouest pour y parvenir.

(a) Où se trouve le trésor ?

(b) Comment y arriver plus simplement (sur le dessin et en français animalier) ?



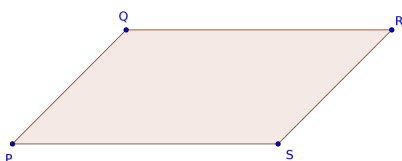
9. (Ex 21) Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A(1; 2)$, $B(x; 8)$ et $C(10; y)$ tels que $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Que vaut (x, y) ?

10. (Ex 22) On considère quatre points P, Q, S et R formant un parallélogramme tel que $\overrightarrow{PQ}$ est parallèle à $\overrightarrow{SR}$ et $\overrightarrow{PS}$ est parallèle à $\overrightarrow{QR}$.

Exprime le vecteur $\overrightarrow{QS} - 2\overrightarrow{PQ}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{PS}$ et $\overrightarrow{PR}$?

11. (Ex 23) Le dessin ci-dessous représente le parallélogramme PQRS (les droites PQ et SR sont parallèles et les droites PS et QR sont parallèles). Notons M le milieu du segment $[P, S]$ et N le milieu du segment $[P, Q]$



Exprime le vecteur $2\overrightarrow{MN}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{PS}$ et $\overrightarrow{RS}$.

5.3 Équations d'une droite

Incursion

Prenons le point $A(-2; 1)$ et le vecteur $\vec{v}(3; 2)$.

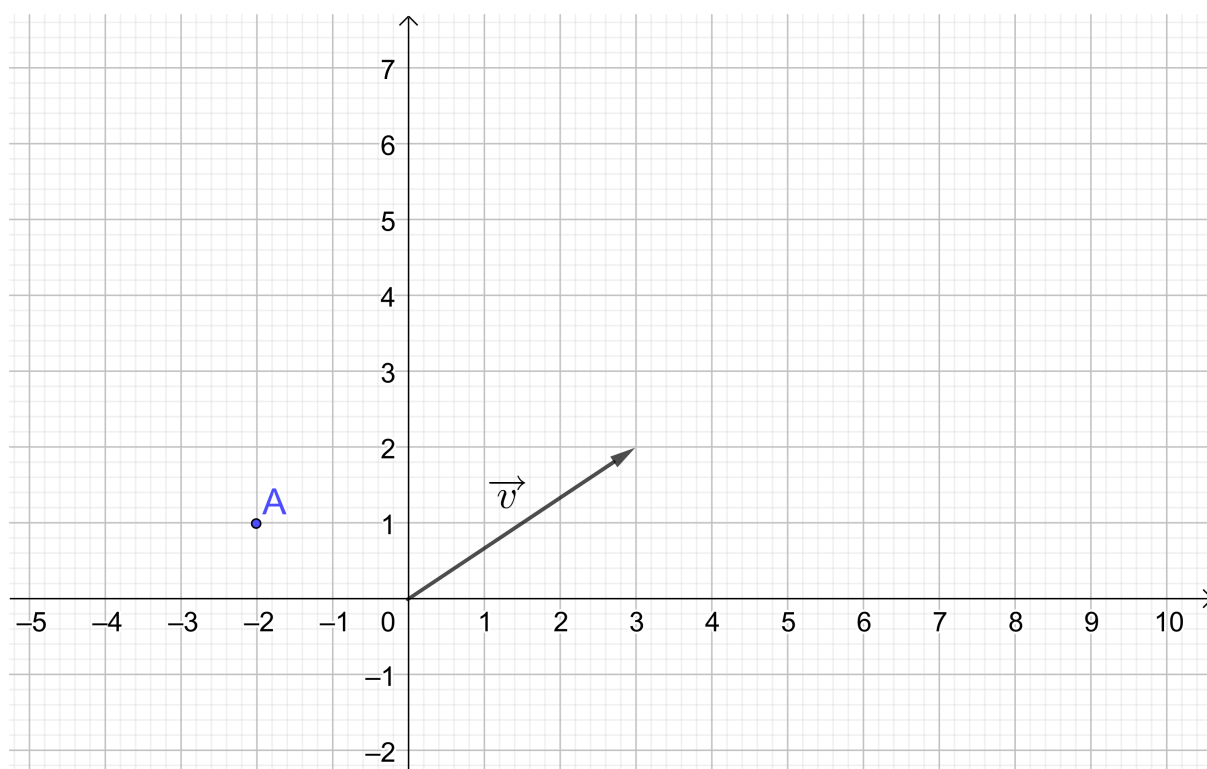
Si nous appliquons le vecteur $\vec{v}$ au point A nous obtenons le point

Si nous appliquons le vecteur $2\vec{v}(6; 4)$ au point A nous obtenons le point

Si nous appliquons le vecteur $3\vec{v}(9; 6)$ au point A nous obtenons le point

Si nous appliquons le vecteur $-\vec{v}(-3; -2)$ au point A nous obtenons le point

Si nous appliquons le vecteur $\frac{1}{2}\vec{v}(\frac{3}{2}; 1)$ au point A nous obtenons le point



Tous ces points sont alignés !

Pourquoi ?

Parce que deux vecteurs multiples sont parallèles, et comme ils ont tous la même origine, leurs extrémités forment une **droite**².

²Par un point donné, il existe une et une seule droite parallèle à une direction donnée.



Deux vecteurs multiples sont parallèles.

J'adore ça : dans la même phrase, il y a à la fois de l'algèbre (multiples) et de la géométrie (parallèles).

C'est la force des vecteurs.

Des extrémités de vecteurs multiples (de même origine) qui forment une droite : on est entré en géométrie (droite) par la porte de l'algèbre (vecteurs multiples).

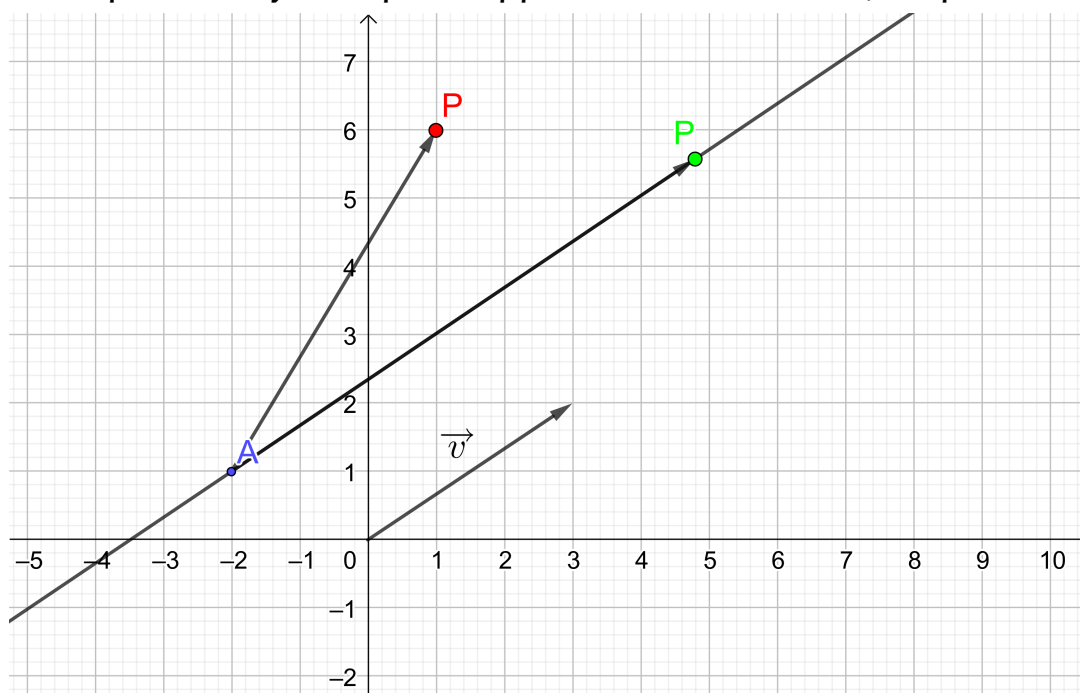
C'est magique !

Équation vectorielle d'une droite

Tu viens de tracer une droite à l'aide du point A et du vecteur $\vec{v}$.

Imagine maintenant un point P qui se promène dans le plan.

Il est possible que ce point appartienne à la droite, ou pas.



Le point P vert appartient à la droite.

Le point P rouge n'appartient pas à la droite.

Pour le point qui appartient à la droite, $\overrightarrow{AP}$ est un multiple de $\vec{v}$.

Pour le point qui n'appartient pas à la droite, $\overrightarrow{AP}$ n'est pas un multiple de $\vec{v}$.

Le point P appartient à la droite si et seulement si $\overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{v}$.

$\overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{v}$ est une équation vectorielle de la droite.
 Au départ, A est un point de la droite et le vecteur $\vec{v}$ en donne la direction (vecteur directeur).

Équation paramétrique d'une droite

Reprenons le point $A(-2; 1)$ et le vecteur $\vec{v}(3; 2)$ dans le repère donné du plan.

Le point P qui se promène dans le plan a des coordonnées variables, appelées $(x; y)$.

Comme aux opérations sur les vecteurs correspondent les mêmes opérations sur les composantes,

$$\overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{v} \text{ devient } (x + 2; y - 1) = k \cdot (3; 2)$$

Ce n'est pas pratique de lire la composante avant le ; puis = recommencer dans le membre de droite et faire de même après le ; !

On simplifie : une ligne pour chaque composante !

$$\begin{cases} x + 2 = 3k \\ y - 1 = 2k \end{cases}$$

$\begin{cases} x - x_A = k \cdot x_v \\ y - y_A = k \cdot y_v \end{cases}$ est un système d'équations paramétriques de la droite.

Au départ, $A(x_A; y_A)$ est un point de la droite et le vecteur $\vec{v}(x_v; y_v)$ en est un vecteur directeur.



Je ne retiens pas la formule des équations paramétriques.
Je retiens celle de l'équation vectorielle
et je remplace les vecteurs par leurs composantes !

Autres exemples

1. Écrivons des équations vectorielles et paramétriques de la droite AB , où $A(3; -1)$ et $B(4; 3)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}(1; 4)$ est un vecteur directeur de la droite AB .

(a) Équation vectorielle de la droite AB : $\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB} \ (k \in \mathbb{R})$.

(b) Équations paramétriques de la droite AB : $\begin{cases} x - 3 = k \\ y + 1 = 4k \end{cases}$

En donnant n'importe quelle valeur réelle à k , nous obtenons les coordonnées d'un point de la droite AB .

Par exemple, pour $k = 2$, on a $P(5; 7)$ qui est bien un point de la droite.

2. Les points $P(5; -1)$ et $Q(-3; -6)$ appartiennent-ils à la droite

dont des équations paramétriques sont $\begin{cases} x - 2 = -3k \\ y - 4 = 5k \end{cases} ?$

Nous constatons que P appartient à la droite car

$$\begin{cases} 3 = -3k \\ -5 = 5k \end{cases} \iff \begin{cases} k = -1 \\ k = -1 \end{cases} \iff k = -1.$$

Par contre, le point Q n'appartient pas à la droite car

$$\begin{cases} -5 = -3k \\ -10 = 5k \end{cases} \iff \begin{cases} k = \frac{5}{3} \\ k = -2 \end{cases}.$$

k ne peut pas être égal à $\frac{5}{3}$ et -2 à la fois.

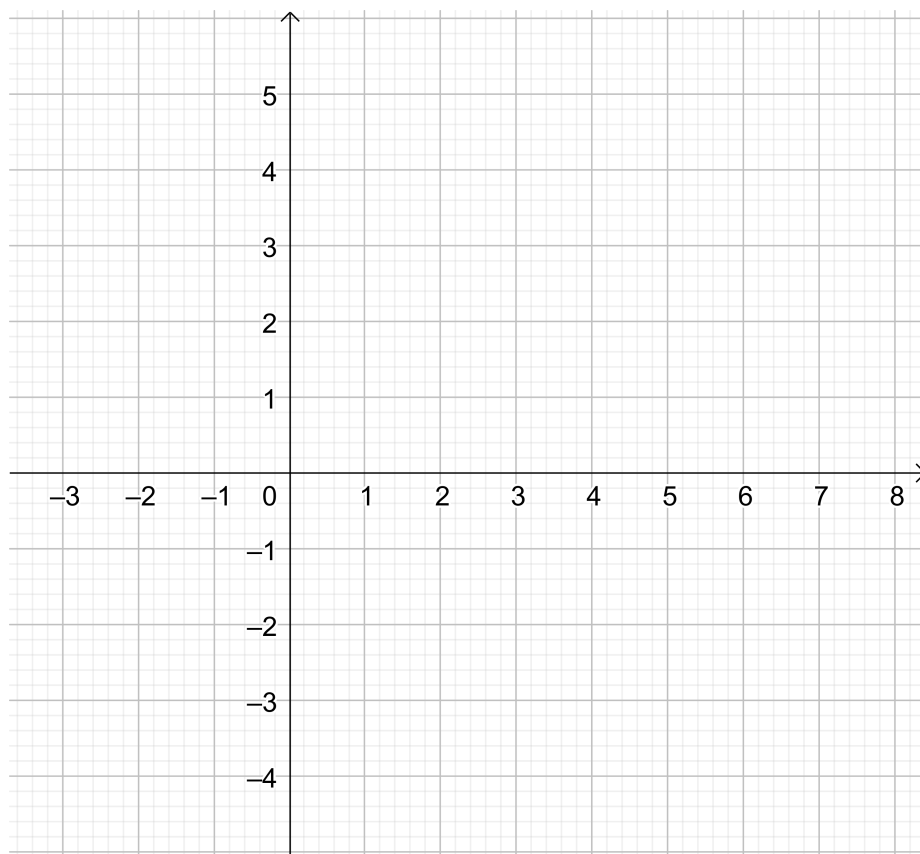
Équation cartésienne d'une droite

Une équation cartésienne d'une droite peut s'obtenir en éliminant le paramètre k du système d'équations paramétriques de cette droite :

$$\begin{cases} x - x_A = k.x_v \\ y - y_A = k.y_v \end{cases}$$

1^{er} cas : droite parallèle à l'axe des ordonnées (verticale)

Trace d_2 passant par $A(3; -1)$ et $B(3; 1)$.



Trace un vecteur directeur $\vec{v} (\quad ; \quad)$.

d_2 a comme équations paramétriques :

Ce qui signifie que $x =$ et que y vaut n'importe quoi, ce qui est normal pour une droite verticale !

Une équation cartésienne de cette droite est donc $d_2 \equiv$

Dès que deux points d'une droite ont comme abscisse 3, tous les points de cette droite ont comme abscisse 3.

Et un point qui n'a pas l'abscisse 3 est ailleurs dans le plan.

Généralisation

Une droite verticale a une équation de la forme

2^{ème} cas : droite non verticale

Trace d passant par $A(3; -1)$ et $B(1; 3)$.

Trace le vecteur directeur $\vec{v}(-2; 4)$. Il n'est pas vertical car $-2 \neq 0$.

d a comme équations paramétriques $d \equiv \begin{cases} x - 3 = -2k \\ y + 1 = 4k \end{cases}$

J'isole k dans la première équation et je substitue dans la seconde.

$$d \equiv \begin{cases} \frac{x-3}{-2} = k \\ y+1 = 4k \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x-3}{-2} = k \\ y+1 = 4 \cdot \frac{x-3}{-2} \end{cases}$$

La seconde équation me rappelle quelque chose.

J'isole x à droite puis y à gauche.

$$d \equiv \begin{cases} \frac{x-3}{-2} = k \\ y+1 = \frac{4x}{-2} + \frac{4 \cdot 3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x-3}{-2} = k \\ y = -2x + 5 \end{cases}$$

L'équation cartésienne $y = -2x + 5$ est celle d'une fonction du premier degré de pente -2 .

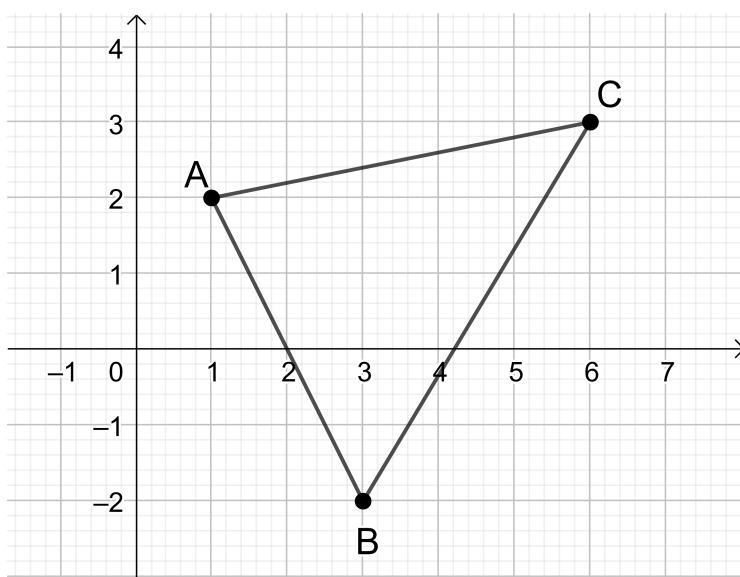
Cette équation a la forme $\boxed{y = mx + p}$ avec $m = \frac{y_v}{x_v}$.

Nous voici revenu en troisième année,

avec une fonction du premier degré de pente $m = -2$.

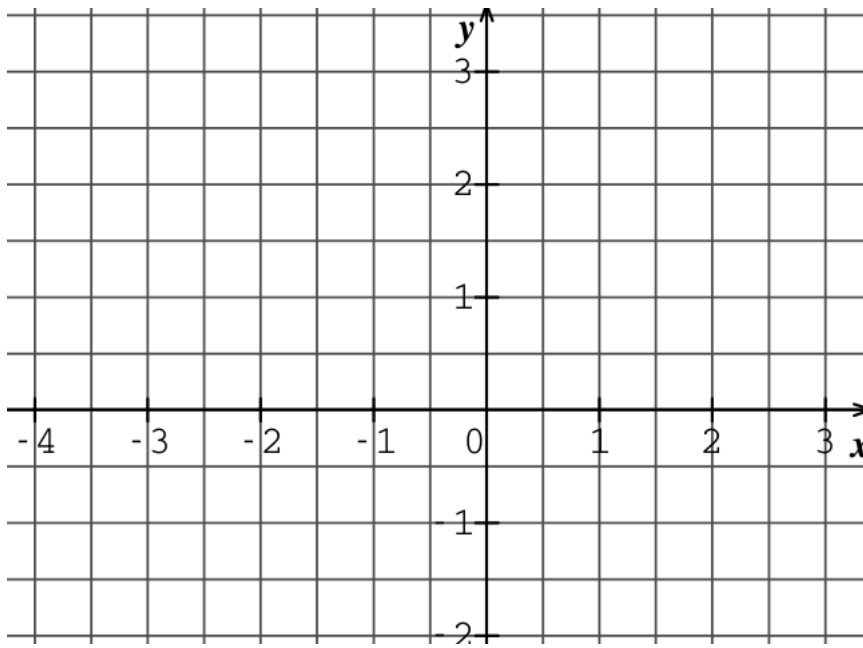
Exercices

1. Pour chaque côté du triangle ABC



- Détermine une équation vectorielle
- un vecteur directeur
- un système d'équations paramétriques

- (d) sa pente
- (e) une équation cartésienne.
2. Détermine un système d'équations paramétriques et une équation cartésienne de la droite contenant les points suivants :
- (a) $A(2; 1)$ et $B(-1; -5)$
- (b) $A(-1; 1)$ et $B(1; 2)$
- (c) $A(2; 4)$ et $B(0; 4)$.
3. Dans chacun des cas, détermine une équation cartésienne de la droite d
- (a) passant par $A(1; -4)$ et admettant le vecteur $\vec{v}(1; -3)$ comme vecteur directeur
- (b) passant par $B(3; 5)$ et admettant le vecteur $\vec{v}(0; 3)$ comme vecteur directeur
- (c) passant par $C(0; 2)$ et admettant le vecteur $\vec{v}(-6; 0)$ comme vecteur directeur
- (d) passant par les points $A(2; -5)$ et $B(3; 1)$
- (e) passant par les points $A(4; -2)$ et $B(8; -2)$
- (f) passant par les points $A(3; -2)$ et $B(3; 7)$.
4. Dans un repère du plan, on considère les points $A(4; 1)$ et $B(4; -2)$.
- (a) Détermine des équations paramétriques de la droite d passant par ces deux points.
- (b) Détermine deux autres points de la droite d .
- (c) Représente la droite d .
- 
5. Trace et donne la pente des droites suivantes (aide-toi d'un vecteur directeur) :



- (a) d_1 passant par $A(1; 0)$ et $B(2; 3)$
- (b) d_2 passant par $C(-1; -2)$ et $D(-3; 2)$
- (c) d_3 passant par $E(-1; 3)$ et $F(3; 3)$
- (d) d_4 passant par $G(-4; 0)$ et $H(-4; -1)$.

6. Détermine une équation cartésienne des droites suivantes :

- (a) d_1 de coefficient directeur (pente) 2 et passant par le point $A(-1; 3)$
- (b) d_2 passant par le point $B(1; -2)$ et de coefficient directeur $-\frac{2}{3}$
- (c) d_3 passant par le point $C(-6; 5)$ et dont le coefficient directeur (pente) n'existe pas
- (d) d_4 passant par le point $D(-1; -2)$ et de coefficient directeur 0
- (e) d_5 passant par les points $E(0; 0)$ et $E'(1; -2)$
- (f) d_6 passant par les points $G(-1; 2)$ et $G'(-1; 5)$
- (g) d_7 passant par les points $H(-1; 4)$ et $H'(0; 5)$
- (h) d_8 passant par les points $I(4; -6)$ et $I'(2; -6)$.

7. Détermine des équations paramétriques de la droite

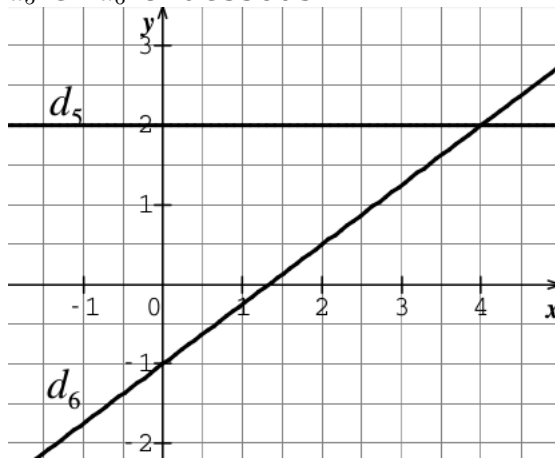
- (a) d passant par $A(2; 3)$ et $B(-2; 4)$
- (b) d' parallèle à d et passant par le point $C(-5; 6)$.

8. Soit la droite d définie par le système d'équations paramétriques $d \equiv$

$$\begin{cases} x = 2k - 3 \\ y = -k + 5 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

- (a) Détermine un point et un vecteur directeur de d .

- (b) Détermine les points d'intersection de la droite d avec les axes de coordonnées.
- (c) Détermine un système d'équations paramétriques de la droite d' perpendiculaire à d passant par le point $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right)$.
- (d) Détermine une équation cartésienne de d et d' , à partir de leurs systèmes d'équations paramétriques.
- (e) Détermine le point d'intersection entre les droites d et d' .
9. Trouve le coefficient directeur (pente) des droites suivantes puis indique si elles sont verticales, horizontales, croissantes ou décroissantes.
- (a) $d_1 \equiv y = -4x + 2$
- (b) $d_2 \equiv 3x - 4y + 5 = 0$
- (c) d_3 passant par $A(-3; -2)$ et $B(1; 4)$
- (d) d_4 passant par $A(-2; -4)$ et $B(-2; 3)$
- (e) d_5 et d_6 ci-dessous.

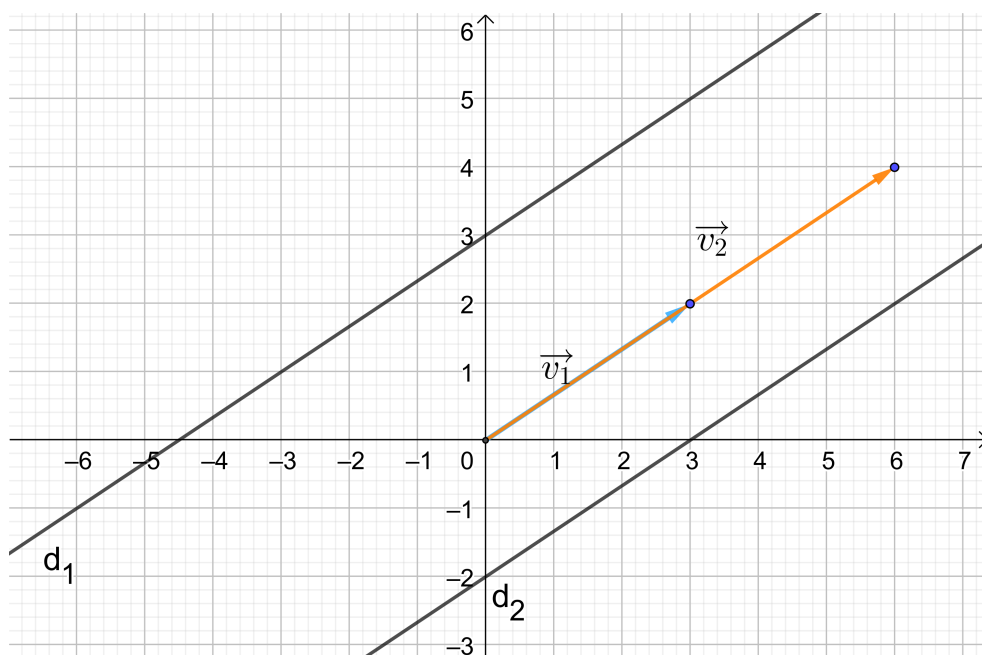


10. Indique si $A(-1; 5)$, $B(3; 2)$ et $C(-5; 8)$ sont alignés ou non.

5.4 Droites parallèles ou perpendiculaires

Droites parallèles

Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le même vecteur directeur.



$$d_1 \equiv \begin{cases} x = 3k \\ y - 3 = 2k \end{cases}$$

$$d_2 \equiv \begin{cases} x = 6k \\ y + 2 = 4k \end{cases}$$

$$\vec{v}_1 (3; 2)$$

$$\vec{v}_2 (6; 4)$$

Dans les équations, les vecteurs directeurs sont multiples (donc parallèles) :
 $\vec{v}_2 = 2 \cdot \vec{v}_1$.

C'eut été plus simple de prendre $\vec{v}_1$ pour les deux droites.



En mathématiques, avoir la même direction
et être parallèles,
c'est la même chose !

Et si les droites sont données par des équations cartésiennes ?

$$d_1 \equiv y = \frac{3}{2}x + 3 \quad m_1 = \frac{3}{2}$$

$$d_2 \equiv y = \frac{3}{2}x - 2 \quad m_2 = \frac{3}{2}$$

Elles ont la même pente !

Et si les équations sont canoniques ?

$$d_1 \equiv 3x - 2y + 6 = 0$$

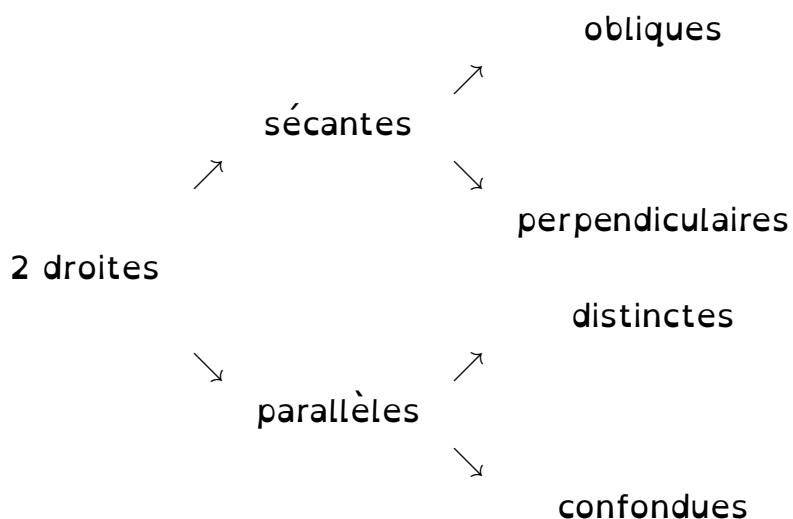
$$d_2 \equiv 3x - 2y - 4 = 0$$

Isole y pour trouver la pente.

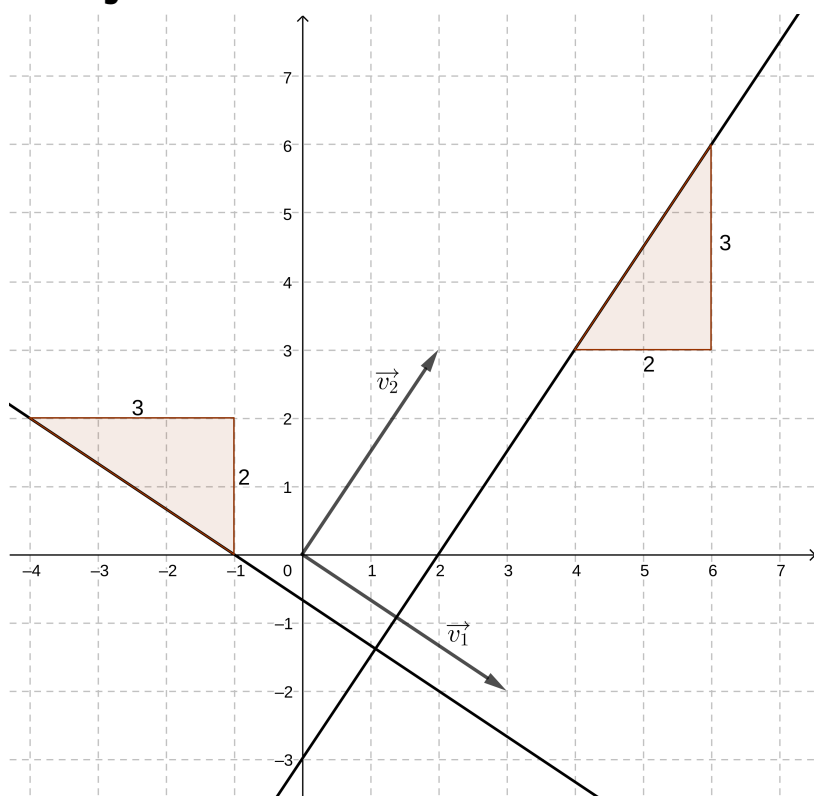
Droites perpendiculaires

Dans le plan, deux droites sont parallèles ou sécantes (un point commun) et, dans le cas où elles sont sécantes, elles peuvent être perpendiculaires ou obliques.

En résumé :



Deux droites sont perpendiculaires lorsque leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.



$$\vec{v}_1 (3; -2)$$

$$\vec{v}_2 (2; 3)$$

$$x_{v1} \cdot x_{v2} + y_{v1} \cdot y_{v2} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 0$$

Les pentes ne sont pas quelconques.

$$m_1 = \frac{-2}{3}$$

$$m_2 = \frac{3}{2}$$

C'est l'inverse de l'opposé : $m_2 = -\frac{1}{m_1}$

Intersection de deux droites

Rappels

- Lorsque l'équation $ax + by + c = 0$ est vraie, le point $P(x; y)$ appartient à la droite.

Lorsque l'équation $ax + by + c = 0$ est fausse, le point $P(x; y)$ est ailleurs dans le plan.

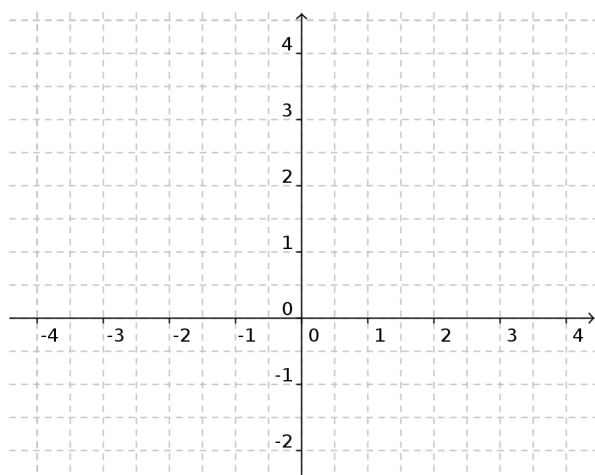
- Deux droites du plan sont parallèles ou sécantes.

Exemple

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Lorsque $2x + y - 3 = 0$ est vrai, la point $P(x; y)$ appartient à la première droite et lorsque $3x - 2y + 1 = 0$ est vrai, la point $P(x; y)$ appartient à la seconde droite.

Un tel point est donc un point commun aux deux droites, un point d'intersection des deux droites.

Graphiquement**Par calcul**

Détermine le point commun par la méthode des combinaisons.

Exercices

1. Détermine un système d'équations paramétriques de la droite

- (a) d contenant les points $A(2, 3)$ et $B(1, -1)$.
- (b) d_1 contenant le point $C(-1; 2)$ et parallèle à d .
- (c) d_2 contenant le point $D(-2, 0)$ et perpendiculaire à d .

2. Détermine une équation cartésienne de chacune des droites suivantes.

- (a) d_1 passant par $A(0; 0)$ et parallèle à la droite $d \equiv y = -\frac{1}{2}x + 3$
- (b) d_2 passant par $B(3; 4)$ et parallèle à la droite $d \equiv y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}$
- (c) d_3 passant par $C(2; -1)$ et parallèle à la droite $d \equiv 6x + 3y = 1$
- (d) d_4 passant par $D(-1; 2)$ et parallèle à la droite $d \equiv y = -5$
- (e) d_5 passant par $E(-7; 5)$ et parallèle à la droite $d \equiv x = 1$
- (f) d_6 passant par $F(-3; 2)$ et parallèle à la droite d contenant les points $M(1; 3)$ et $N(-2; 4)$

- (g) d_7 passant par $G(-3; 2)$ et perpendiculaire à la droite $d \equiv y = \frac{x}{5} + 1$
 (h) d_8 passant par $H(0; 0)$ et perpendiculaire à la droite $d \equiv y = 3x - 5$
 (i) d_9 passant par $I(0; -1)$ et perpendiculaire à la droite $d \equiv 4x - 7y + 7 = 0$
 (j) d_{10} passant par $J(5; 1)$ et perpendiculaire à la droite $d \equiv 5y - 1 = 0$
 (k) d_{11} passant par $K(0; 3)$ et perpendiculaire à la droite d contenant les points $M(1; 6)$ et $N(2; -4)$
 (l) d_{12} passant par $L(-1; 2)$ et perpendiculaire à la droite d contenant les points $M(6; 3)$ et $N(6; 7)$

3. Établis les correspondances entre les deux colonnes ci-dessous (il y en a exactement 10).

- 1) la droite d'équation $y = 3x - 1$
 2) la droite d'équation $y = -2x$
 3) la droite d'équation $y = 6$
 4) la droite d'équation $y = \frac{1}{4}x + 3$

- A) est parallèle à la droite d'équation $y = -2x + 1$
 B) est parallèle à la droite d'équation $y = 3x$
 C) est croissante
 D) passe par $(0; 0)$
 E) est parallèle à l'axe des abscisses
 F) est parallèle à la droite d'équation $y = -2$
 G) est décroissante
 H) a comme pente 3
 I) est perpendiculaire à la droite d'équation $y = -4x - 1$

4. Trouve, graphiquement et par calcul, l'éventuel point d'intersection des droites :

- (a) $d_1 \equiv 6x + 4y - 5 = 0$ et $d_2 \equiv 2x + 3y + 5 = 0$
 (b) $d_1 \equiv 7x + 4y + 1 = 0$ et $d_2 \equiv -x + 3y + 7 = 0$
 (c) $d_1 \equiv -10x + 5y - 4 = 0$ et $d_2 \equiv 2x - y - 9 = 0$

5. Détermine une équation cartésienne des droites suivantes.

- (a) a de coefficient directeur (pente) $-\frac{2}{5}$ et passant par $A(-4; 1)$
 (b) b passant par les points $B(-1; 3)$ et $B'(5; -3)$

- (c) c passant par les points $C(4; -1)$ et $C'(2; -1)$
- (d) d passant par $D(3; -2)$ et parallèle à la droite $d' \equiv y = -3x - 1$
- (e) e passant par $E(5; 4)$ et parallèle à $e' \equiv 3x - 2y = 0$
- (f) f passant par $F(0; -3)$ et parallèle à f' passant par les points $M(-3; -2)$ et $N(5; -1)$
- (g) g passant par $G(2; 1)$ et parallèle à la droite $g' \equiv 3x + 4 = 0$
- (h) h passant par $H(-3; 2)$ et perpendiculaire à la droite $h' \equiv y = \frac{x}{5} + 1$
- (i) i passant par $I(0; -1)$ et perpendiculaire à la droite $i' \equiv 4x - 7y + 7 = 0$
- (j) j passant par $J(0; 0)$ et perpendiculaire à la droite j' passant par les points $M(1; -2)$ et $N(-1; -8)$
- (k) k passant par $K(4; -5)$ et perpendiculaire à la droite $k' \equiv x + 3 = 0$
- (l) l passant par $L(10; 12)$ et perpendiculaire à la droite l' ayant comme pente 0.
6. Trouve graphiquement, puis par calcul, l'éventuel point d'intersection des droites suivantes.
- (a) $d_1 \equiv y = -3x + 2$ et $d_2 \equiv y = 5x - 3$
- (b) $d_3 \equiv 2x - 5y + 3 = 0$ et $d_4 \equiv 4x + 3y - 1 = 0$
- (c) $d_5 \equiv -4x + 6y - 1 = 0$ et $d_6 \equiv 3y = 2x - 15$
7. (Ex 23) Dans le plan muni d'un repère cartésien orthonormé, on considère la droite qui passe par les points $(0; 16)$ et $(10; 0)$. On considère également une autre droite passant par l'origine et de pente $\frac{3}{5}$.
Que vaut l'abscisse x du point d'intersection de ces deux droites ?
8. (Ex 22) Dans le plan muni d'un repère cartésien orthonormé, on considère les points
 $A(2; 3)$ $B(7; 6)$ $C(4; 1)$
 Soit d_1 la droite contenant les points A et B, d_2 la droite comprenant le point C et perpendiculaire à d_1 et en fin d_3 la droite d'équation $y = -2x + 8$.
 Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de d_2 et d_3 ?
- (a) $(-2; 6)$
- (b) $(-1; 5)$
- (c) $(1; 6)$

(d) $(1; 7)$

9. (Ex 24) Dans le plan muni d'un repère cartésien Oxy on considère la droite d passant par le point $(1; 5)$ et parallèle à la droite passant par les points $(0; 240)$ et $(120; 0)$.

Quelle est l'abscisse de l'intersection entre la droite d et l'axe Ox ?

10. (Ex 25) Dans le plan muni d'un repère cartésien orthonormé, on considère la droite d de pente $m = \sqrt{2}$ passant par le point $(-3; \sqrt{2})$ et la droite d' perpendiculaire à d et passant par le point $(0; 3)$.

Que vaut l'abscisse du point d'intersection de d' avec l'axe des abscisses ?

partie II

Comprendre (m54)

Chapitre 1

Fonctions trigonométriques

Objectifs

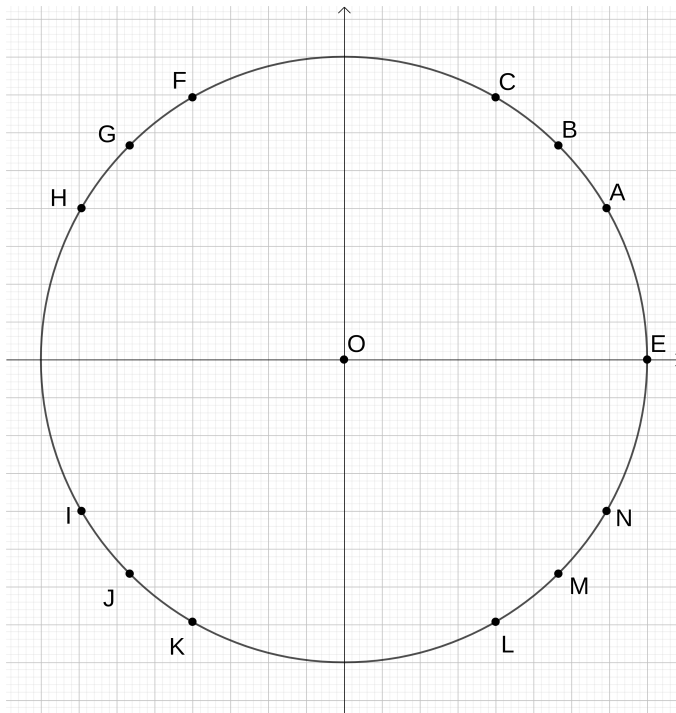
1. Représenter sur le cercle trigonométrique un point correspondant à un angle donné ainsi que ses nombres trigonométriques.
2. Représenter graphiquement les fonctions trigonométriques.
3. Résoudre des équations du type $\sin(x) = a$, $\cos(x) = a$, $\tan(x) = a$ en utilisant la calculatrice, le cercle trigonométrique et les fonctions trigonométriques.



En plus des outils de « Tétramath, la méthode », tu auras besoin d'un rapporteur (parfois tracé dans une équerre) et d'une calculatrice scientifique.
Indique chaque nouvelle section dans ton cahier !

1.0 Prérequis

1. Recopie le cercle trigonométrique dans ton cahier.
Pour chacun des points A, B, ... N,
 - (a) trace l'angle défini par ce point
 - (b) donne une mesure de cet angle
 - (c) donne le sin et le cos.



<http://www.jean-luc-goffin.be/trigono>

2. Repère les angles qui ont

(a) des sin égaux,

(b) des cos égaux.

3. Étudie et représente

(a) $f : x \rightarrow 2x^2 - 5x - 7$

(b) $f : x \rightarrow -x^2 + 3x + 4$

(c) $f : x \rightarrow -x^2 + x - 1$

4. La fonction g est une transformée de $f(x) = x^2$.

Relie la fonction à la transformation.

$$g(x) = (x + 3)^2 \quad \bullet$$

$$g(x) = 2x^2 \quad \bullet$$

$$g(x) = -x^2 \quad \bullet$$

$$g(x) = (x - 3)^2 \quad \bullet$$

$$g(x) = (2x + 1)^2 \quad \bullet$$

- Déformation horizontale de coefficient $\frac{1}{2}$ suivie d'une translation horizontale de $-\frac{1}{2}$ unité
- Translation horizontale de 3 unités
- Translation horizontale de -3 unités
- Symétrie d'axe Ox
- Déformation verticale de coefficient 2

1

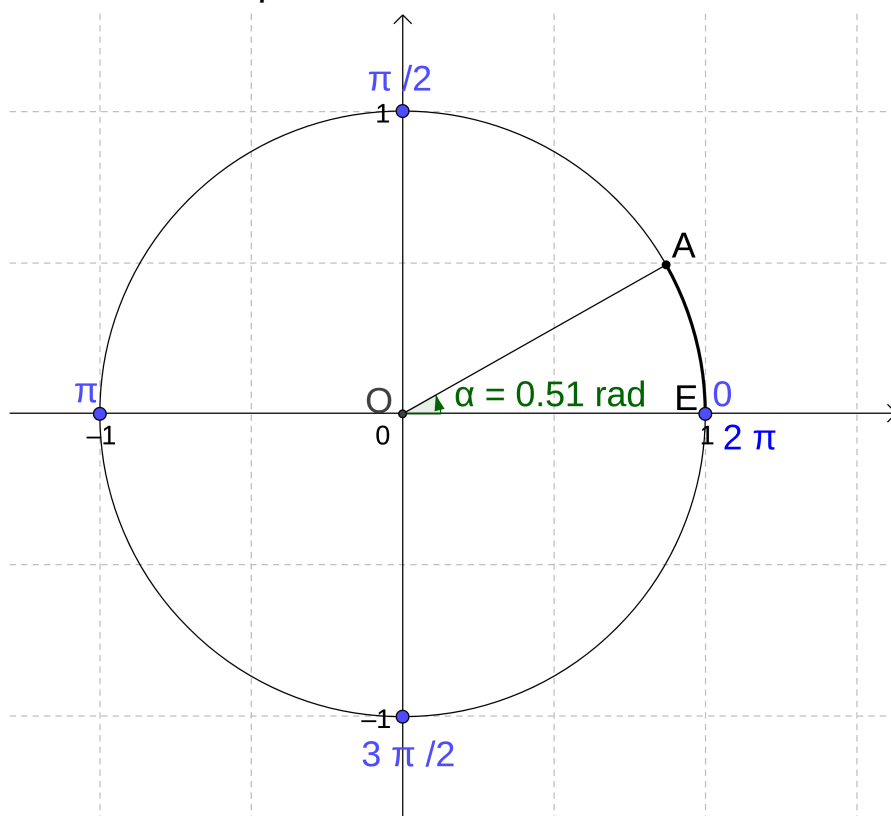
1.1 Mesures d'un angle en radians

La longueur du cercle trigonométrique vaut 2π .

Pourquoi ?

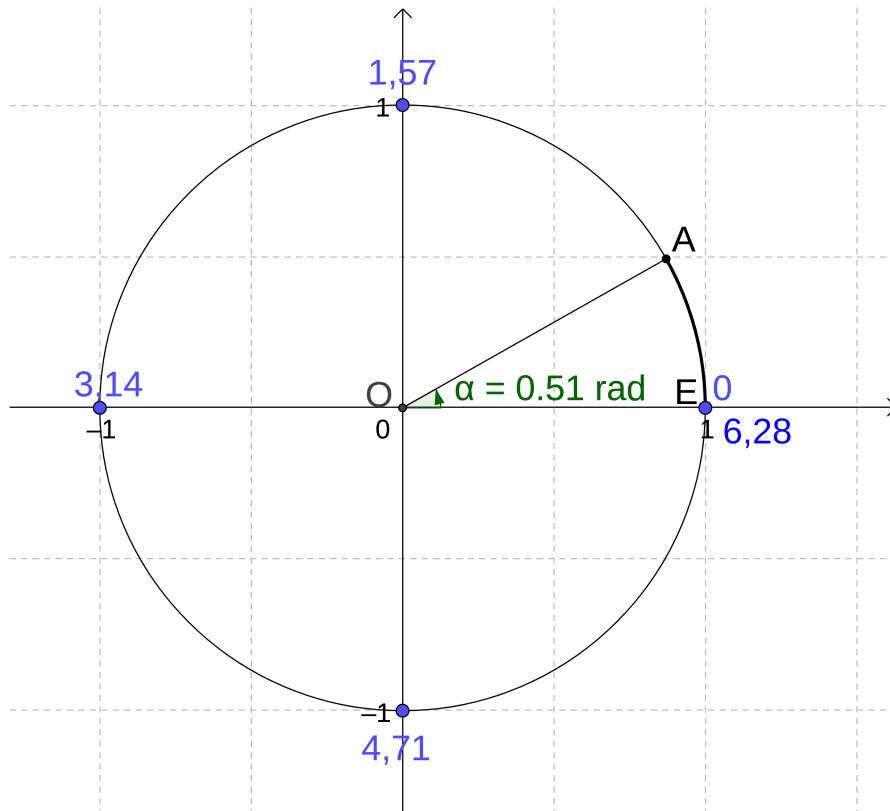
Parce que son rayon vaut 1, et la formule $l = 2\pi r$ fait le job.

Démarrons du point E et faisons le tour du cercle dans le sens positif.



J'ai écrit les graduations données par mon compteur aux 4 points (cardinaux).

Avec 2 décimales :



Comprends-tu mieux pourquoi α mesure 0,51 radians ?

Exercices

1. Représente sur le cercle trigonométrique les angles dont voici une mesure en radians :

(a) $\alpha = 1,2$

(b) $\beta = -2,2$

(c) $\gamma = 2,9$

Donne ensuite une valeur approximative du sin et du cos de chaque angle.

Vérifie à la calculatrice.

2. Donne une mesure en radians (2 décimales) de deux angles différents qui ont le même

(a) sin

(b) cos

3. (Ex 21) Considérons le cosinus et le sinus d'un angle α dont l'amplitude est strictement comprise entre $\frac{3\pi}{4}$ et π .

Donne le signe de $\cos \alpha$, de $\sin \alpha$ et compare $|\cos \alpha|$ et $|\sin \alpha|$.

4. (Ex 24) Considérons le cosinus et le sinus d'un angle $\alpha \in \left] \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4} \right[$ (en radians).

Donne le signe de $\cos \alpha$, de $\sin \alpha$ et compare $|\cos \alpha|$ et $|\sin \alpha|$.

5. (Ex 22) On considère la relation $\sin(\alpha) = -0,8$ où $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

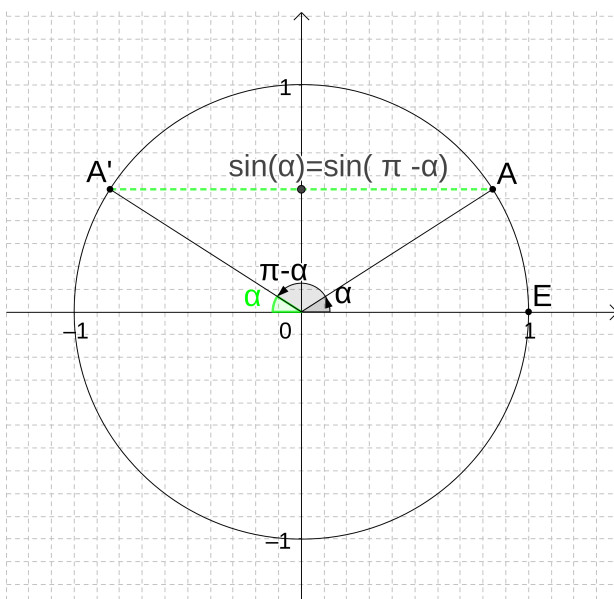
Que vaut $\tan(\alpha)$?

1.2 Angles associés



Deux angles qui ont le même sin ou le même cos, ça doit se voir quelque part.
Retournons sur le du cercle trigonométrique !

Angles supplémentaires

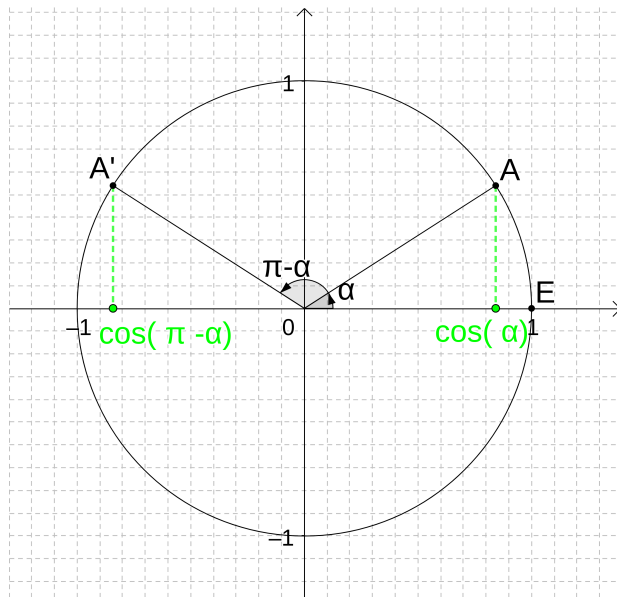


Les points A et A' sont **symétriques** par rapport à l'axe Oy.
Ils ont donc la même ordonnée,

ce qui signifie que les 2 angles ont le même sinus.

Ces angles mesurent α et $\pi - \alpha$.

Note la formule dans ton cahier.



Les points A et A' sont **symétriques** par rapport à l'axe Oy.

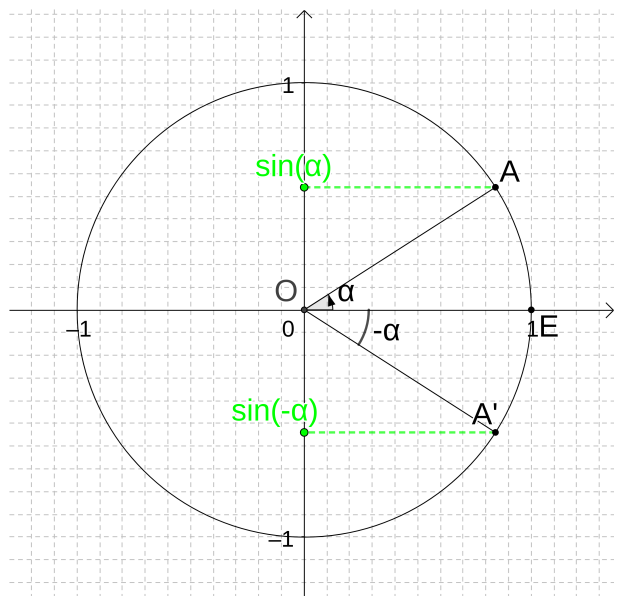
Ils ont donc des abscisses opposées,

ce qui signifie que les 2 angles ont des cos opposés.

Note la formule dans ton cahier.

Angles opposés

Faisons la même chose avec l'axe Ox.

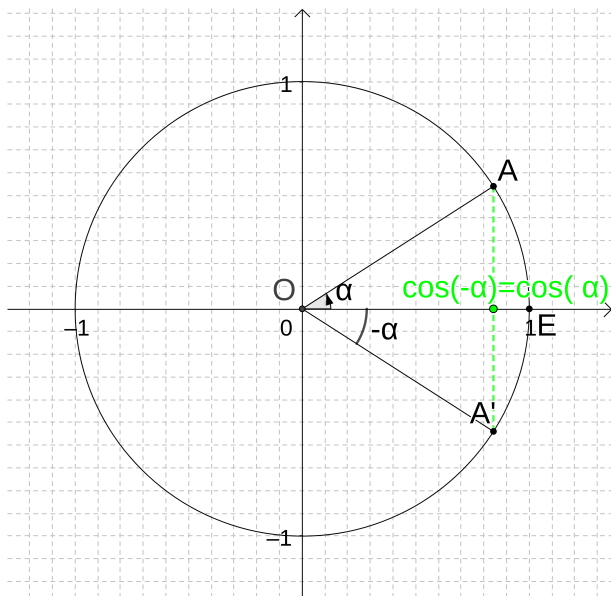


Les points A et A' sont **symétriques** par rapport à l'axe Ox.

Ils ont donc des ordonnées opposées,

ce qui signifie que les 2 angles ont des sin opposés.

Note la formule dans ton cahier.



Les points A et A' sont **symétriques** par rapport à l'axe Ox.

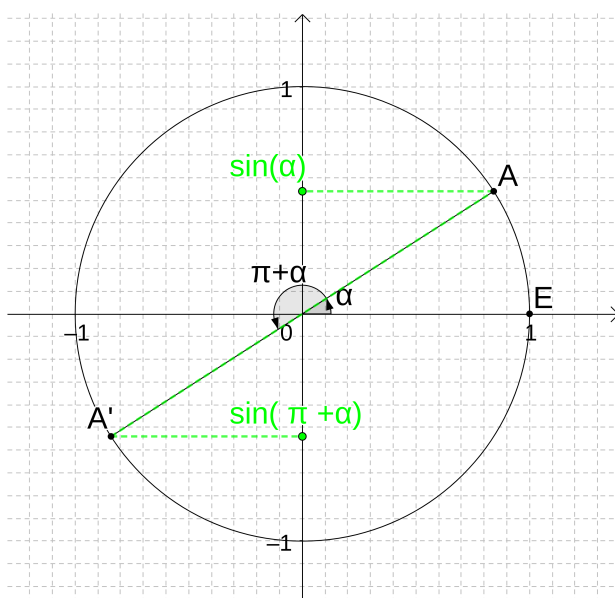
Ils ont donc la même abscisse,

ce qui signifie que les 2 angles ont des cos égaux.

Note la formule dans ton cahier.

Angles antisupplémentaires

Faisons la même chose avec le centre (0;0).



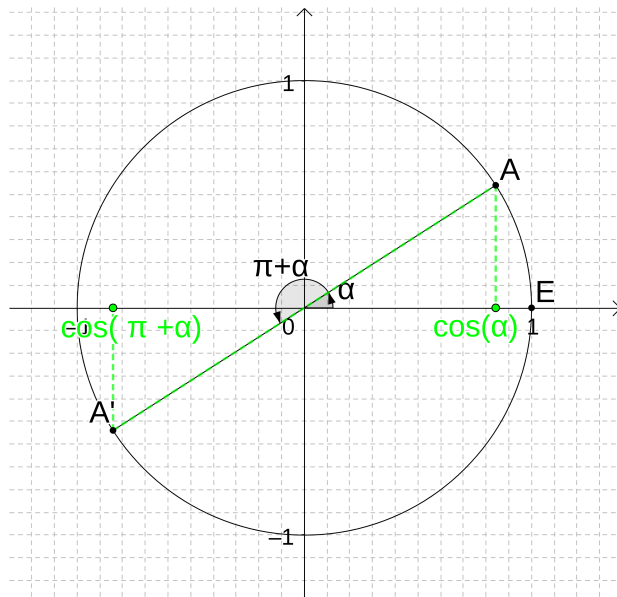
Les points A et A' sont **symétriques** par rapport au centre (0;0).

Ils ont donc des ordonnées opposées,

ce qui signifie que les 2 angles ont des sin opposés.

Ces angles mesures α et $\pi + \alpha$.

Note la formule dans ton cahier.



Les points A et A' sont **symétriques** par rapport au centre (0;0).

Ils ont donc des abscisses opposées,

ce qui signifie que les 2 angles ont des cos opposés.

Note la formule dans ton cahier.

Exercices

Reprenons les valeurs remarquables.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

- Détermine une graduation en radians des points F, G, H, ...N.

1.3 sin et cos de l'angle double

Au vu des formules précédentes, il est clair que, en général, $\sin(2x) \neq 2 \sin(x)$ et $\cos(2x) \neq 2 \cos(x)$.

Voici les formules correctes :

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x) \text{ et}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

La dernière formule ressemble à la formule fondamentale

$$1 = \cos^2(x) + \sin^2(x).$$

En les additionnant, on obtient

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1.$$

Il y a donc deux formules pour $\cos(2x)$.

Exercices

1. (Ex 22) On considère un angle α , exprimé en radians, qui vérifie les inégalités $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ et la relation $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \frac{1}{2}$.

Que vaut cet angle α (en radians) ?

2. (Ex 23) Si x est un angle quelconque, quelle est, parmi les relations suivantes, celle qui est toujours vérifiée ?

(a) $\cos(x^2) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2$

(b) $\cos(x^2) = 2 \cos(x) \sin(x)$

(c) $\cos(x^2) = 2 \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2 - 1$

(d) $\cos(x^2) = 2 \left(\cos\left(\frac{x^2}{2}\right) \right)^2 - 1$

3. (Ex 24) Parmi les quatre expressions suivantes, laquelle est équivalente à $\cos^4(x) - \sin^4(x)$ pour tout réel x ?

(a) $\cos(2x)$

(b) $\cos^2(x)$

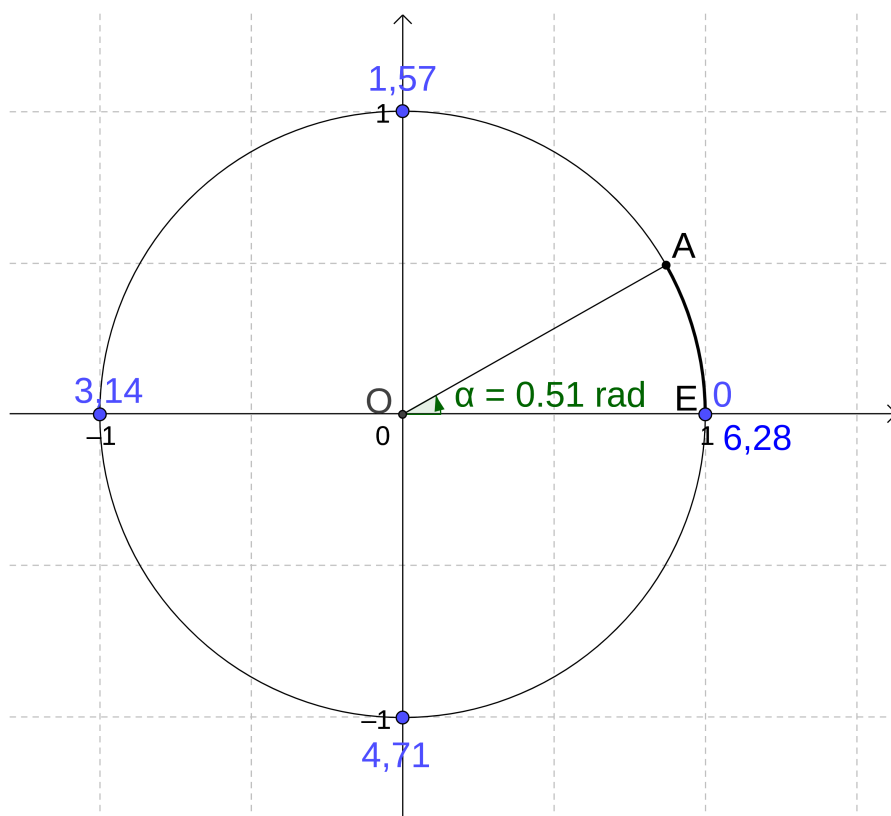
(c) $\cos^2(2x)$

(d) $2 \cos^2(x)$

1.4 Les fonctions sin, cos et tan

Silence, on tourne !

Faisons une promenade sur le cercle trigonométrique.



Je pars du point E et je monte : après être passé par 0,51 j'arrive à 1,57 $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ puis 3,14 (π) ensuite 4,71 $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ 6,28 (2π) et ça continue. Pourquoi s'arrêter : ce cercle est rond ! Je reviens à α avec comme mesure 6,79 $(\alpha + 2\pi)$.

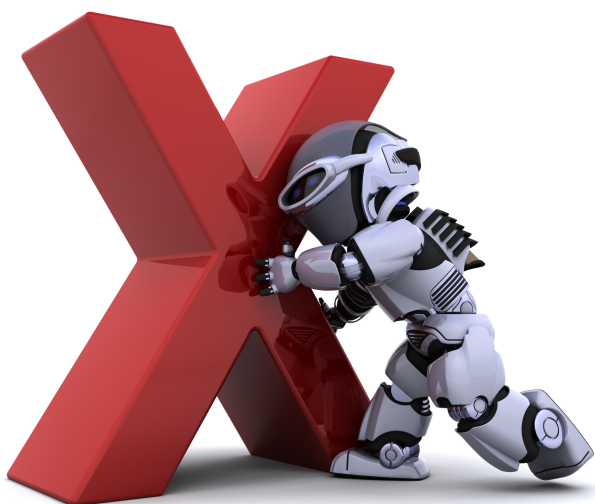
Et bien oui, un angle a plusieurs mesures !

0,51 6,79 -5,77 $(\alpha - 2\pi)$ sont 3 mesures différentes du même angle !

Cet angle a même une infinité de mesures :

$0,51 + k.2\pi$ où k est un nombre entier (de tours du cercle).

Un angle a plusieurs mesures (qui diffèrent de $k.2\pi$) et tout nombre réel représente une mesure d'angle orienté en radians.



Tiens, x vient de s'inviter dans notre cours. C'est un nombre réel qui représente une mesure d'angle orienté en radians.

Ce nombre réel donne un point du cercle trigonométrique.

Ce point a 2 coordonnées : $\cos x$ et $\sin x$.

Ce sont nos deux premières fonctions trigonométriques.

$\cos : x \rightarrow \cos x$ et

$\sin : x \rightarrow \sin x$.

Et comme n'importe quel x donne un point du cercle trigonométrique qui a 2 coordonnées,

$\text{dom}(\sin) = \mathbb{R}$ et

$\text{dom}(\cos) = \mathbb{R}$.

Tu apprendras dans la deuxième partie que

$\text{dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

En tournant sur le cercle trigonométrique, nous avons remarqué que

$x + k \cdot 2\pi$

sont des mesures différentes du même angle (où k est un nombre entier).

En particulier, $x + 2\pi$ mesure le même angle que x et donc

$\sin(x + 2\pi) = \sin x$ et

$\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

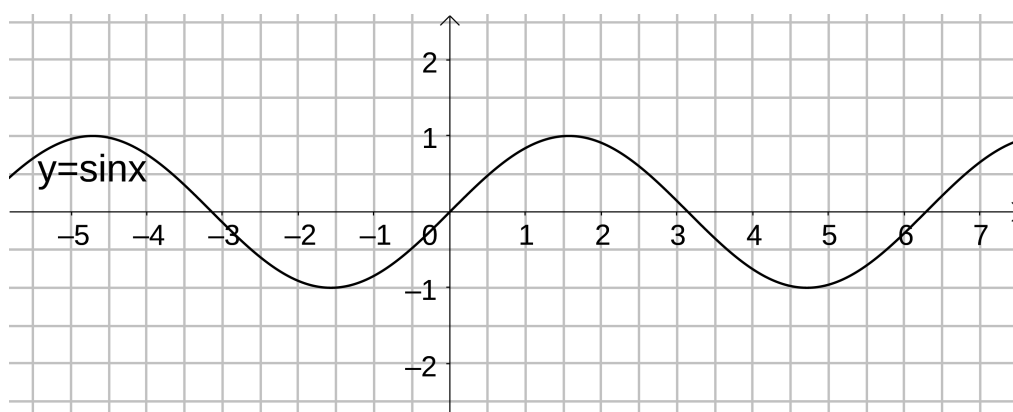
On dit que

la période de la fonction $\sin$ est 2π

la période de la fonction $\cos$ est 2π et

la période de la fonction $\tan$ est π .

Graphiques

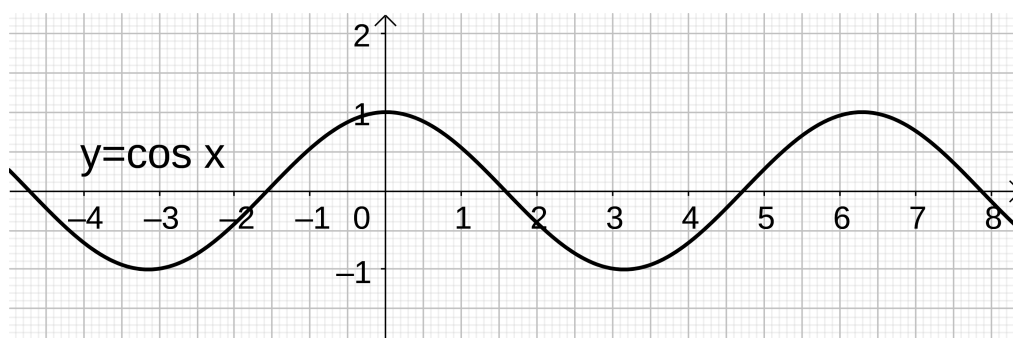


Recopie ce graphique dans ton cahier en respectant les points

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	-1	0	1	0	-1	0

Remarque que l'axe Ox est coupé à 45° , ce qui sera démontré plus tard.

Cette fonction est impaire : $\sin(-x) = -\sin(x)$.

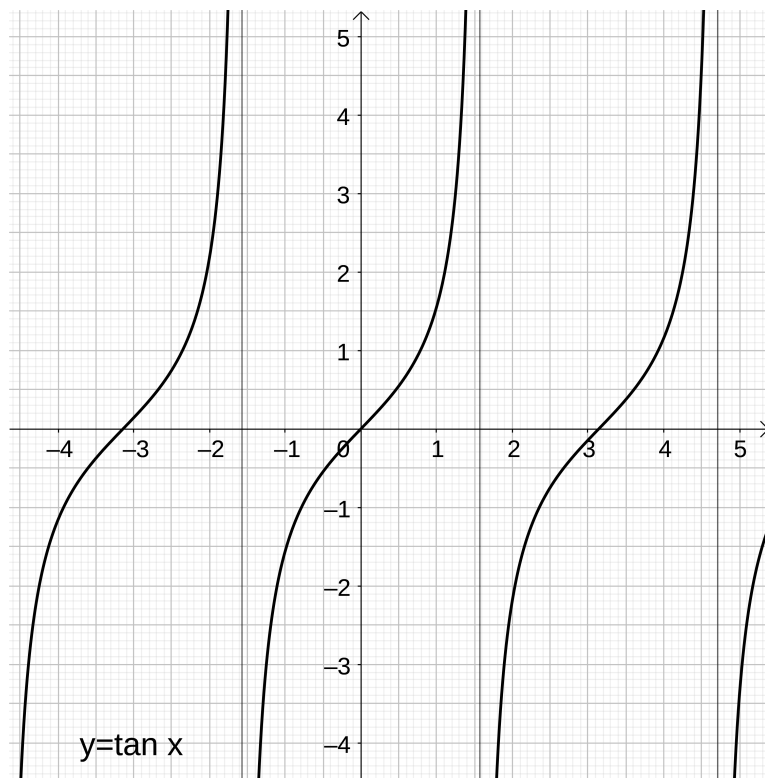


Recopie ce graphique dans ton cahier en respectant les points

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	0	1	0	-1	0	1

Remarque que l'axe Ox est coupé à 45° .

Cette fonction est paire : $\cos(-x) = \cos(x)$.



Recopie ce graphique dans ton cahier en respectant les points

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\tan x$		0	1	$\sqrt{3}$		0		0

Remarque que l'axe Ox est coupé à 45° , ce qui sera démontré plus tard.

Cette fonction est impaire : $\tan(-x) = -\tan(x)$.

En partant de $x = 0$,

$\tan x$ devient aussi grand qu'on veut à mesure que x se rapproche de $\frac{\pi}{2}$.

On en a des choses à démontrer !

Exercices

1. Pour la fonction $\sin$,

- (a) donne les maxima
- (b) les racines
- (c) le tableau de variation.

2. Donne les racines des trois fonctions trigonométriques.

3. Quelle transformation

- (a) applique la fonction **COS** sur la fonction **SIN** ?
- (b) applique la fonction **SIN** sur la fonction **COS** ?
- (c) donne les deux formules décrivant ces transformations.

4. (Ex 21) On donne le nombre x tel que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et vérifiant $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$

Que vaut $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$?

1.5 Équations trigonométriques

Angles associés et réciproques

Parmi les formules de angles associés, il y a 3 égalités sans changement de signe :

Leurs réciproques sont vraies aussi, comme tu peux le voir sur le cercle trigonométrique.

Angles supplémentaires α et $\pi - \alpha$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

Réciproque :

Deux **SIN** sont égaux lorsque les angles sont égaux ou supplémentaires.

Angles opposés α et $-\alpha$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

Réciproque :

Deux **COS** sont égaux lorsque les angles sont égaux ou opposés.

Angles antisupplémentaires α et $\pi + \alpha$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

Réciproque :

Deux $\tan$ sont égales lorsque les angles sont égaux ou antisupplémentaires.

Type $\sin(x) = y$

Résous, en radians, et représente les solutions sur le cercle trigonométrique.

Exemple

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Remarque d'abord que $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

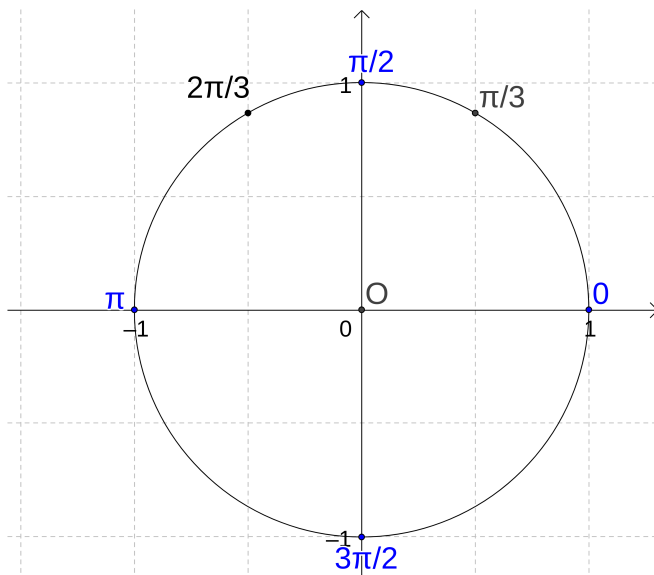
Je peux donc écrire

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$$

Deux $\sin$ sont égaux lorsque les angles sont égaux ou supplémentaires, donc

$$x = \frac{\pi}{3} + k.2\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi}{3} + k.2\pi$$

$$\text{Réponse : } x = \frac{\pi}{3} + k.2\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{2\pi}{3} + k.2\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Exercices

Résous, en radians, et représente les solutions sur le cercle trigonométrique.

1. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $2\sin x + 1 = 0$

3. $\sin x = 0,8$ (avec 3 décimales exactes)

4. $\sin x = 3$ (avec 3 décimales exactes)

5. $\sin x = -0,4$ (avec 3 décimales exactes)

Type $\cos(x) = y$

Résous, en radians, et représente les solutions sur le cercle trigonométrique.

Exemple

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

Nous allons remplacer le membre de droite par un cos.

A l'aide des valeurs remarquables, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Raté!

Remarque que $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Encore raté!

Pour changer le signe du cos,

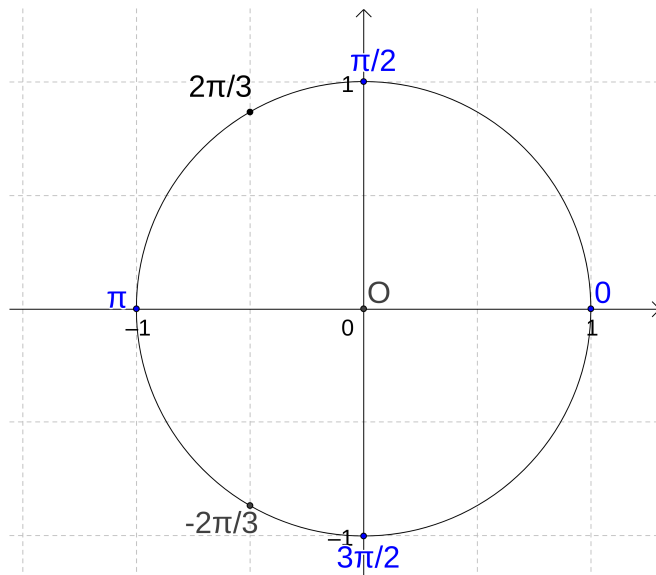
faisons une symétrie d'axe Oy : $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$. Gagné!

$$\cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Deux **COS** sont égaux lorsque les angles sont égaux ou opposés, donc

$$x = \frac{2\pi}{3} + k.2\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + k.2\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Exercices

Résous, en radians, et représente les solutions sur le cercle trigonométrique.

6. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7. $2 \cos x - 1 = 0$

8. $\cos x = -0,8$ (avec 3 décimales exactes)

9. $\cos x = \pi$ (avec 3 décimales exactes)

10. $\cos x = 0,4$ (avec 3 décimales exactes)

Type $\tan(x) = y$

Résous, en radians, et représente les solutions sur le cercle trigonométrique.

Exemple

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Remarque d'abord que $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

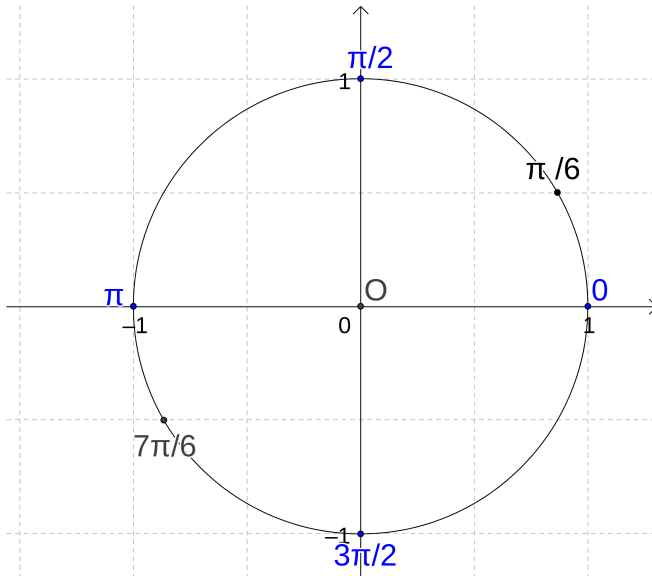
Je peux donc écrire

$$\tan x = \tan \frac{\pi}{6}$$

Deux $\tan$ sont égales lorsque les angles sont égaux ou antisupplémentaires, donc

$$x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi + \frac{\pi}{6} + k.2\pi$$

$$\text{Réponse : } x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{7\pi}{6} + k.2\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Exercices

Résous, en radians, et représente les solutions sur le cercle trigonométrique.

11. $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

12. $\tan x + 1 = 0$

13. $\tan x = -0,8$ (avec 3 décimales exactes)

14. $\tan x = \pi$ (avec 3 décimales exactes)

15. $\tan x = 0,4$ (avec 3 décimales exactes)

Type $\sin(mx + p) = y$

Résous, en radians, et représente les solutions sur le cercle trigonométrique.

Exemple

$$\sin(2x + 1) = \frac{1}{2}$$

D'abord une égalité entre deux sin !

$$\sin(2x + 1) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

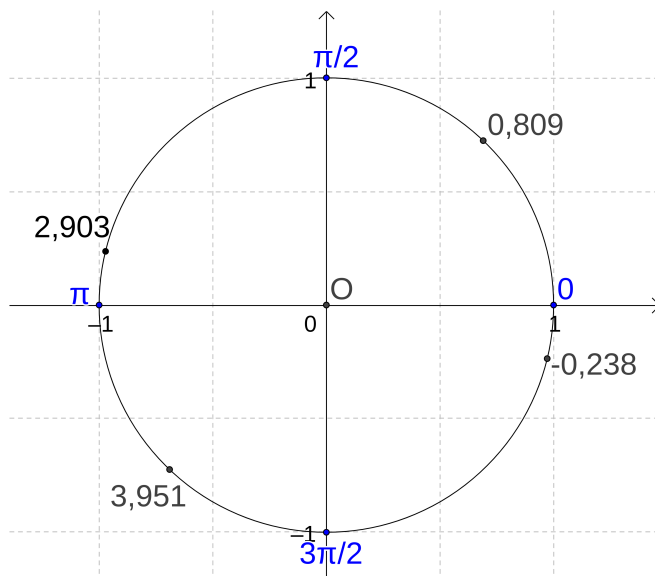
Deux sin sont égaux lorsque les angles sont égaux ou supplémentaires, donc

$$2x + 1 = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \quad \text{ou} \quad 2x + 1 = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi$$

Ensuite, c'est de l'algèbre :

$$2x = \frac{\pi}{6} - 1 + k.2\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{5\pi}{6} - 1 + k.2\pi$$

$$\text{Réponse : } x = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{12} - \frac{1}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Exercices**

16. $2\sin(2x) + 1 = 0$

17. $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \sqrt{3}$

18. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

19. $\sqrt{2} \cdot \sin(2x) = 1$

20. $2 \cdot \sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

21. (Ex 25) On considère l'équation, pour x réel :

$$\cos(x^2) + \sin(x^2) = 1$$

Dans les propositions suivantes, quel ensemble fait partie de l'ensemble des solutions de cette équation ?

(a) $\left\{ \sqrt{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{4}} : k = 0, 1, 2, \dots \right\}$

(b) $\left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} : k = 0, 1, 2, \dots \right\}$

(c) $\left\{ \sqrt{k \frac{\pi}{2}} : k = 0, 1, 2, \dots \right\}$

(d) $\mathbb{R}$

Chapitre 2

Limites de fonctions

Compétences et objectifs

Articuler expression analytique, représentation graphique et comportement aux limites d'une fonction.

Connaître les savoirs et les procédures

1. Identifier dans l'expression analytique d'une fonction donnée les fonctions usuelles, les opérations et leur hiérarchie.
2. Donner un exemple de limite de fonction illustrant un cas d'indétermination.

Appliquer une procédure

1. Déterminer, à partir de l'expression analytique d'une fonction, son domaine et les limites qui apportent des informations sur son graphique.
2. Calculer des limites et les interpréter graphiquement.

Transférer

2.0 Prérequis

1. Pour les fonctions suivantes, recherche le domaine et les intersections avec les axes.

(a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$

(b) $f(x) = x^3 - 4x + 3$

(c) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 2}$

(d) $f(x) = \sqrt{7 - 3x}$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$

(f) $f(x) = \sqrt{(x + 2) \cdot (3 - x)}$

(g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$

(h) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{(x^2 + 1) \cdot (2 - x)}}$

(i) $f(x) = \frac{\sqrt{2x + 5}}{x^2 - 3x + 2}$

(j) $f(x) = \sqrt{\frac{x - 4}{5 - x}}$

(k) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4}$

(l) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1}$

2. Mêmes questions (deuxième série)

(a) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4}$

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{1 + 3x}}{\sqrt{x^2 - 7x + 10}}$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$

(d) $f(x) = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$

(e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}$

(f) $f(x) = \sqrt{\frac{x - 3}{-x^2 + 3x - 2}}$

$$(g) f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-5}}$$

$$(h) f(x) = \frac{3-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$(i) f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-5}}$$

Simplification de $\sqrt{x^2}$

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{ce qui donne toujours un nombre positif.}$$

3. Effectue

$$(a) \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$$

$$(b) \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$$

$$(c) \text{ (Ex 22) } \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} - \sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$$

2.1 Limites de fonctions "en $+\infty$ "

La notion de limite "en $+\infty$ " est identique pour une fonction et pour une suite.

Prenons la suite arithmétique 1 3 5 7 9 $t_1 = 1$ et $r = 2$.

$$t_i = 1 + (i-1).2 = 2i - 1$$

$$\lim 2i - 1 = +\infty$$

$2i - 1$ devient aussi grand qu'on veut.

Prenons la fonction f telle que $f(x) = 2x - 1$.

Quelle différence y a-t-il entre la suite et la fonction ?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty$$

$2x-1$ devient aussi grand qu'on veut à condition que x soit suffisamment grand.

Définitions

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

signifie que $f(x)$ devient aussi grand qu'on veut à condition que x soit suffisamment grand.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

signifie que $f(x)$ devient aussi petit qu'on veut à condition que x soit suffisamment grand.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

signifie que $f(x)$ devient aussi proche qu'on veut de b à condition que x soit suffisamment grand.

Dans tout ce chapitre, a , b , c désignent des nombres réels.

Exemples

1. $f : x \longrightarrow \frac{x+2}{x-2}$

x	$\frac{x+2}{x-2}$
1	-3
4	3
20	1,22
1000	1,004...
10000	1,0004...
1000000	1,000004...

Il semble que $\frac{x+2}{x-2}$ soit aussi proche qu'on veut de 1, à condition que x

soit suffisamment grand, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-2} = 1$.

2. $f : x \longrightarrow \frac{2x+1}{1-x}$

x	$\frac{2x+1}{1-x}$
100	-2,0303...
10000	-2,000303...
1000000	-2,000003...

Il semble que $\frac{2x+1}{1-x}$ soit aussi proche qu'on veut de -2 , à condition que x soit suffisamment grand, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{1-x} = -2$.

Remarques

1. Nous obtenons un renseignement sur une partie du graphique que nous ne pouvons pas tracer (à droite). Regardez sur une calculette graphique.
2. La notation $x \rightarrow +\infty$ est indispensable, puisque x n'est pas un naturel et donc ne numérote rien du tout. Autrement dit, x peut tendre vers n'importe quoi. Il faut donc préciser vers quoi x tend.
3. Lorsque nous utilisons la notion de limite, nous quittons l'algèbre pour entrer dans l'analyse.

Autres exemples

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 5 = +\infty$. En effet, cette fonction du premier degré a comme pente 2. Si x augmente de 1 unité, $2x - 5$ augmente de 2 unités, ce qui nous permet de trouver ainsi des valeurs de $2x - 5$ aussi grandes que l'on veut.

x	$2x - 5$
1	
2	
3	
4	
5	

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 - 3x = -\infty$. En effet, cette fonction du premier degré a comme pente -3. Si x augmente de 1 unité, $4 - 3x$ diminue de 3 unités, ce qui nous permet de trouver ainsi des valeurs de $4 - 3x$ aussi petites que l'on veut.

x	$4 - 3x$
1	
2	
3	
4	
5	

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$. Le raisonnement est le même que pour une suite géométrique de raison 2.

x	2^x
1	
2	
3	
4	
5	

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$. Le raisonnement est le même que pour une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$
1	
2	
3	
4	
5	

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2$. Te souviens-tu du dernier exercice des suites ?

x	$2 - \frac{1}{x}$
1	

Exemples fondamentaux

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

J'ai 1 gâteau.

Il vient 10 personnes. Chacune recevra $\frac{1}{10}$.

Il vient 100 personnes. Chacune recevra $\frac{1}{100}$.

Il vient 1000 personnes. Chacune recevra $\frac{1}{1000}$.

La portion de chacun devient aussi proche qu'on veut de 0.

Exercice

Il est admis une fois pour toutes que, lorsque ces limites existent, la limite d'une somme est la somme des limites, la limite d'un produit est le produit des limites, la limite d'un quotient est le quotient des limites et la limite d'une composée est la composée des limites.

Calcule les limites suivantes et écris ce que signifie le résultat.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 7x^2 - 5x + 2$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 1}{x^3 - 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - x^2)(3x^3 - 2)}{x^6 - 5}$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6 + x^4 - 2x}{x^2 + 1}$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + x - 2x^2}{1 + 3x}$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 - x}$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + x^2}$

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 2}$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 4}{\sqrt{4x^2 - 5x}}$

11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$

12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} |x|$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} E(x)$$

2.2 Limites de fonctions “en $-\infty$ ”

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

signifie que $f(x)$ devient aussi grand qu'on veut à condition que x soit suffisamment petit.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

signifie que $f(x)$ devient aussi petit qu'on veut à condition que x soit suffisamment petit.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

signifie que $f(x)$ devient aussi proche qu'on veut de b à condition que x soit suffisamment petit.

Exemples fondamentaux

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Exercices

Calcule les limites suivantes et écris ce que signifie le résultat.

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + 7x^2 - 5x + 2$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 1}{x^3 - 1}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1 - x^2)(3x^3 - 2)}{x^6 - 5}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 + x^4 - 2x}{x^2 + 1}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + x - 2x^2}{1 + 3x}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2 - x}$$

Asymptotes horizontales

Lorsque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$, on dit que la droite $AH \equiv y = b$ est asymptote horizontale au graphe de f .

Exercice

8. (Ex 22) On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{3}{x} - 2 + \frac{4x^2 - 2}{x^2 + 1}$$

On constate que la fonction f admet une asymptote horizontale.

Quelle est la point d'intersection de cette asymptote avec l'axe Oy ?

Deuxième série

Rappel

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{ce qui donne toujours un nombre positif.}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x + x^2}$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 2}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 4}{\sqrt{4x^2 - 5x}}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} E(x)$$

2.3 L'indétermination $\frac{\infty}{\infty}$

Observez les 4 résultats suivants, obtenus dans les pages précédentes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+4}{\sqrt{4x^2-5x}} = -\frac{1}{2}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6+x^4-2x}{x^2+1} = +\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3+x-2x^2}{1+3x} = -\infty$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-x^2)(3x^3-2)}{x^6-5} = 0.$

Dans chacun de ces cas, le numérateur et le dénominateur tendent vers ∞ , et pourtant nous avons obtenu 4 résultats très différents ! Il est donc impossible d'énoncer une règle sûre pour les cas $\frac{\infty}{\infty}$.

On dit que $\frac{\infty}{\infty}$ est un cas d'indétermination.

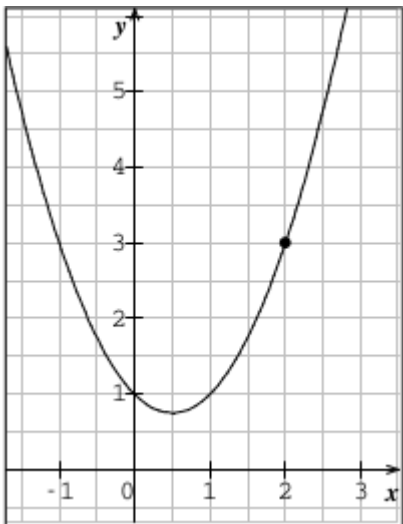
2.4 Limites de fonctions lorsque $x \rightarrow a$

Approche graphique

Exemple 1

Considérons la fonction f telle que $f(x) = x^2 - x + 1$, dont le domaine est $\mathbb{R}$.

Prenons des valeurs de x proches de 2 à l'aide du graphique ou d'un tableau.



x	1,9	1,95	1,99	1,995	$\rightarrow$	2
$f(x)$	2,71	2,85	2,97	2,985	$\rightarrow$	3

x	2,1	2,05	2,01	2,005	$\rightarrow$	2
$f(x)$	3,31	3,15	3,03	3,015	$\rightarrow$	3

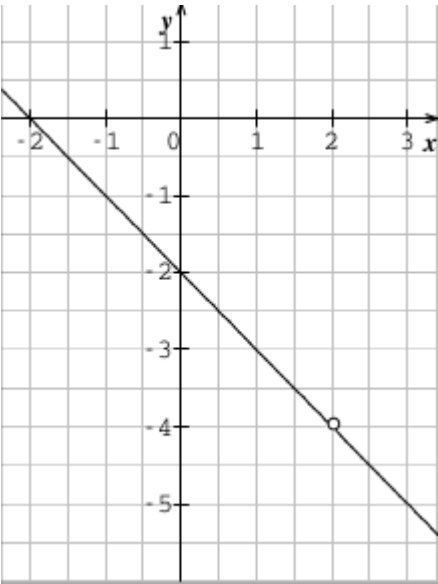
$f(x)$ est aussi proche que l'on veut de 3 à condition que x soit assez proche de 2.

On écrira $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. Note que $f(2) = 3$.

Exemple 2

Considérons la fonction f telle que $f(x) = \frac{4 - x^2}{x - 2}$, dont le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Nous pouvons nous approcher de $x = 2$ tout en restant dans le domaine. Prenons des valeurs de x proches de 2 à l'aide du graphique ou d'un tableau.



x	1,9	1,95	1,99	1,995	$\rightarrow$	2
$f(x)$	-3,9	-3,85	-3,99	-3,995	$\rightarrow$	-4

x	2,1	2,05	2,01	2,005	$\rightarrow$	2
$f(x)$	-4,1	-4,05	-4,01	-4,005	$\rightarrow$	-4

$f(x)$ est aussi proche que l'on veut de -4 à condition que x soit assez proche de 2.

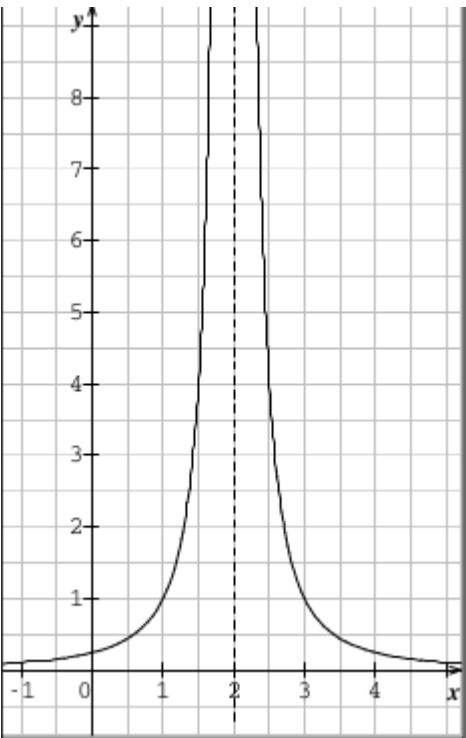
On écrira $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -4$. Note que $f(2)$ n'existe pas.

Exemple 3

Considérons la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$, dont le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Nous pouvons nous approcher de $x = 2$ tout en restant dans le domaine.

Prenons des valeurs de x proches de 2 à l'aide du graphique ou d'un tableau.



x	1,9	1,95	1,99	1,995	$\rightarrow$	2
$f(x)$	100	400	10000	40000	$\rightarrow$	$+\infty$

x	2,1	2,05	2,01	2,005	$\rightarrow$	2
$f(x)$	100	400	10000	40000	$\rightarrow$	$+\infty$

$f(x)$ est aussi grand que l'on veut à condition que x soit assez proche de 2.

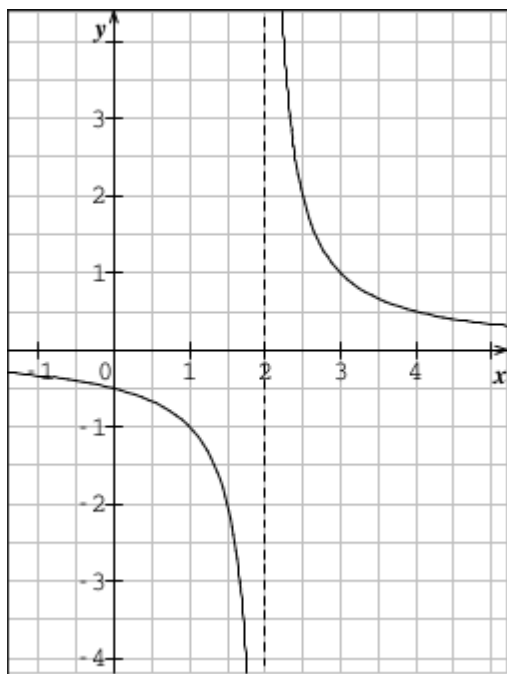
On écrira $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$. Note que $f(2)$ n'existe pas.

Exemple 4

Considérons la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x-2}$, dont le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Nous pouvons nous approcher de $x = 2$ tout en restant dans le domaine.

Prenons des valeurs de x proches de 2 à l'aide du graphique ou d'un tableau.



x	1,9	1,95	1,99	1,995	$\rightarrow$	2
$f(x)$	-10	-20	-100	-200	$\rightarrow$	$-\infty$

x	2,1	2,05	2,01	2,005	$\rightarrow$	2
$f(x)$	10	20	100	200	$\rightarrow$	$+\infty$

$f(x)$ est aussi petit que l'on veut à condition que x soit assez proche de 2 et plus petit que 2.

On écrira $\lim_{x \rightarrow 2^G} f(x) = -\infty$.

$f(x)$ est aussi grand que l'on veut à condition que x soit assez proche de 2 et plus grand que 2.

On écrira $\lim_{x \rightarrow 2^D} f(x) = +\infty$.

Notez que $f(2)$ n'existe pas.

Conclusions

1. Une limite lorsque x tend vers a donne le comportement de $f(x)$ lorsque x est voisin de a .

2. Cette limite n'a de sens que s'il est possible d'évaluer $f(x)$ pour des valeurs de x voisines de a , c'est-à-dire si a appartient au domaine, ou a n'appartient pas au domaine mais est une borne d'un de ses intervalles.

Exemple $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ a comme domaine $] -\infty; 1[$.

Il y a donc un sens à calculer la limite lorsque x tend vers -3 (appartient au domaine) ou vers 1 (borne du domaine) mais pas vers 2 (ni dans le domaine, ni borne).

Définitions

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

signifie que $f(x)$ devient aussi grand qu'on veut à condition que x soit suffisamment proche de a .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

signifie que $f(x)$ devient aussi petit qu'on veut à condition que x soit suffisamment proche de a .

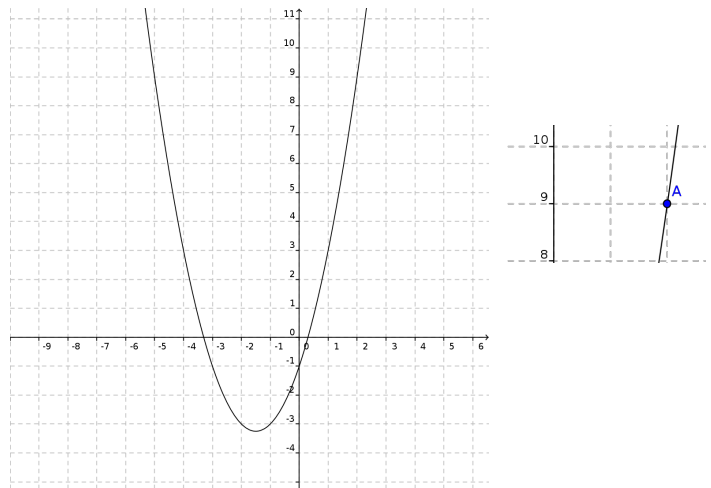
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

signifie que $f(x)$ devient aussi proche qu'on veut de b à condition que x soit suffisamment proche de a .

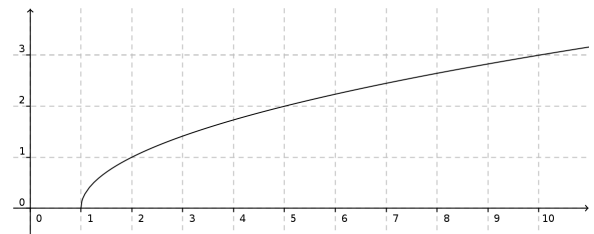
Exercices

Calcule les limites suivantes et écris ce que signifie le résultat (vérifie qu'elles ont un sens à l'aide du domaine).

1. $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3x - 1$

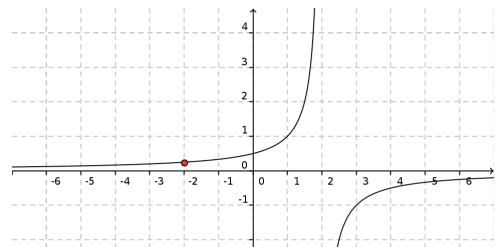


2. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1}$



3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2+x}{4-x^2}$



5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x^2-1}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + |x|$

7. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x - 3}$

8. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x^3 - 3x^2 + 4}$

Pour une fonction rationnelle, l'indétermination " $\frac{0}{0}$ " se lève en simplifiant par $x - a$

9. (Ex 24) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+3}{x^3+27} \right)^{\frac{1}{3}}$

10. $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 - 1}$

11. $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x^2 - 1}$

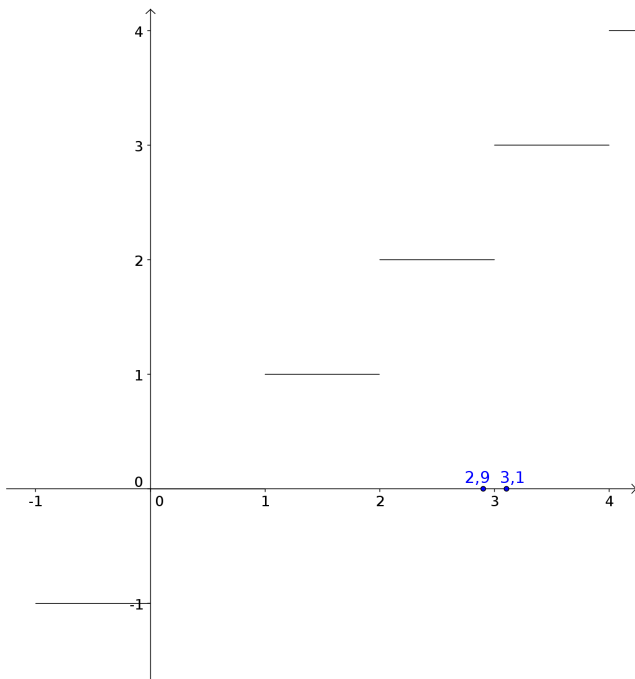
12. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sqrt{x^2 - 1}$

13. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin 3x$

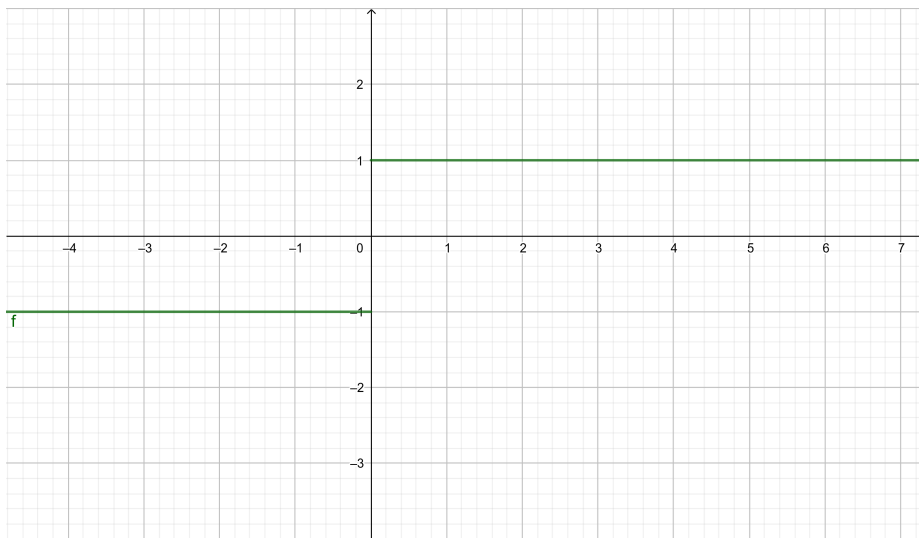
14. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \tan 2x$

2.5 Limites à gauche et à droite

Reprenons la fonction E (partie entière). Que vaut $\lim_{x \rightarrow 3} E(x)$?



Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$?



S'il est nécessaire de distinguer les limites lorsque x est inférieur à a ou supérieur à a , on notera

$\lim_{x \rightarrow a^G} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ lorsque x est inférieur à a , et

$\lim_{x \rightarrow a^D} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ lorsque x est supérieur à a .

Tu peux aussi noter $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

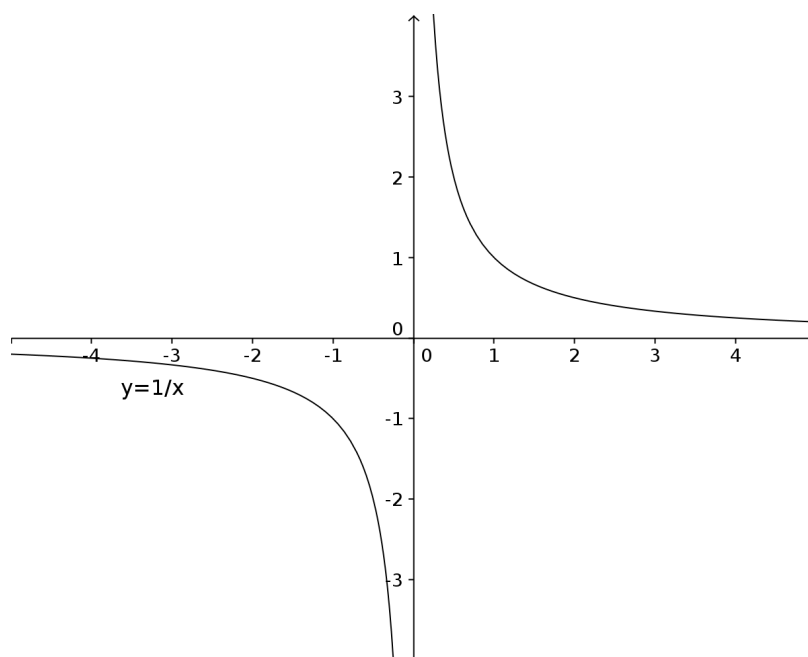
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

2.6 Limites infinies lorsque $x \rightarrow a$

Exemple fondamental

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

Signification :



Par symétrie,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

Autre exemple

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{5}{3x - 2}$$

Le 5 au numérateur ne change pas grand-chose. $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{5}{3x - 2} = 5.$ $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{1}{3x - 2}.$

Et $3x - 2 \rightarrow 0.$

Il s'agit donc d'une situation comparable à $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$,

qui pourrait se noter 5. $\lim_{3x-2 \rightarrow 0} \frac{1}{3x-2} = \pm\infty$ ou plus simplement

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{5}{3x-2} = \frac{5}{0} = \pm\infty$$

Très bien, mais $+\infty$ ou $-\infty$?

Ce sont deux résultats totalement opposés :

$\frac{5}{3x-2}$ est aussi grand qu'on veut ou aussi petit qu'on veut.

Un petit tableau de signe va nous répondre :

x		$\frac{2}{3}$	
$3x-2$	$-$	0	$+$

Finalement,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{2}{3} \\ x < \frac{2}{3}}} \frac{5}{3x-2} = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{2}{3} \\ x > \frac{2}{3}}} \frac{5}{3x-2} = +\infty.$$

Exercice

Calcule les limites

1. $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{3-x^2}{1-2x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+3}{x^2-4x+4}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-4-x^2}{2x^3-x^2-4x+3}$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 + 4x + 3}{3x - 4 - x^2}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 6x - 7}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} \frac{5x^2 - 9x + 4}{-4x^2 + 7x - 3}$$

$$8. \text{ (Ex 21)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 6x^2}{x^2 + 2x - 8}$$

2.7 Synthèse $\lim_{x \rightarrow a}$

A la suite des exercices précédents, nous pouvons dire

$$\frac{\text{pas zéro ou zéro}}{\text{pas zéro}} = \text{réponse}$$

$$\frac{\text{zéro}}{\text{zéro}} = \text{indéterminé}$$

$$\frac{\text{pas zéro}}{\text{zéro}} = \infty$$

Attention! Il s'agit de règles mnémotechniques, pas de théorèmes mathématiques!

Asymptotes verticales

Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite $AV \equiv x = a$ est asymptote verticale au graphe de f .

Exercice

$$9. \text{ (Ex 21)} \text{ On considère la fonction } f \text{ définie par } f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 2}$$

Quelles sont les équations définissant les asymptotes verticales de cette fonction ?

2.8 Fonctions discontinues

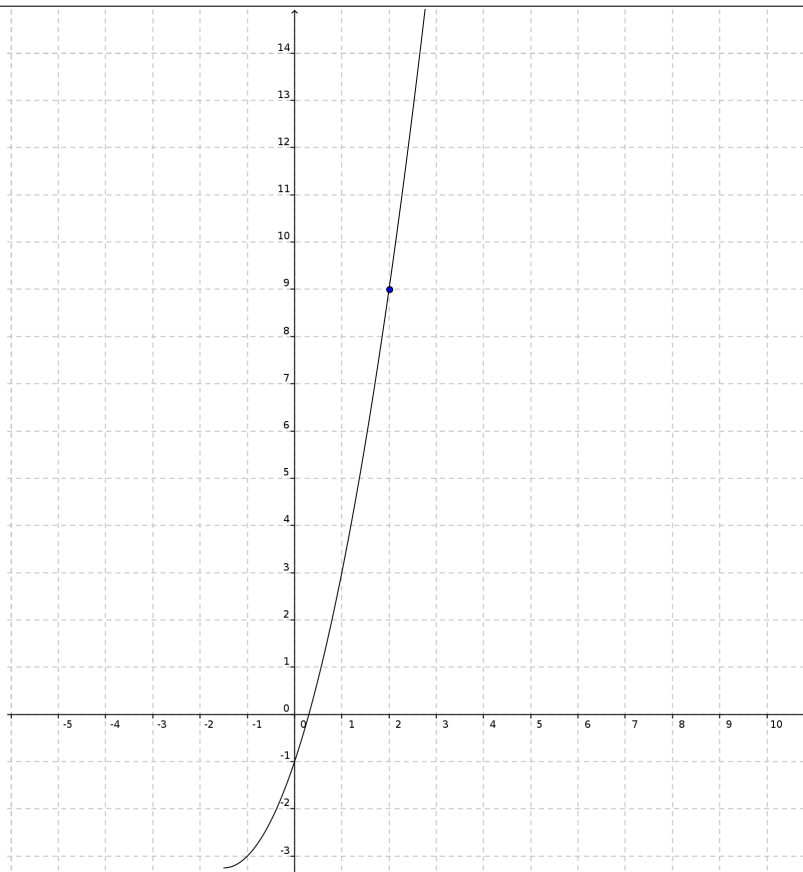
Intuitivement, une fonction continue est une fonction dont le graphe se trace sans lever le crayon. Une fonction discontinue est une fonction pour laquelle il faut lever le crayon. E , $\tan$, $\frac{1}{x}$, sont des fonctions discontinues : pour certaines valeurs de x , il faut lever le crayon.

Définition

$$f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

autrement dit,

f est continue en $a \Leftrightarrow f(x)$ est aussi proche qu'on veut de $f(a)$ à condition de prendre x assez proche de a .



Dans cet exemple, $a = 2$ et $f(a) = 9$. $f(x)$ est aussi proche qu'on veut de 9 à condition que...

Autrement dit, il ne manque pas d'image au voisinage de 9.

Il y a donc trois façons pour une fonction d'être discontinue en $x = a$.

- $f(a)$ n'existe pas, bien que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe. C'est le cas de $\tan$ en

$$x = \frac{\pi}{2}.$$

- $f(a)$ existe mais ne vaut pas $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. C'est la cas de E en $x = 3$

(limite à gauche).

$$E(3) = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3^-} E(x) = 2$$

- $f(a)$ existe, et $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas. Ce cas ressort du cadre de ce cours.

Remarques

- Lorsqu'une fonction admet une limite infinie en $x = a$, elle est fatalement discontinue ().
- Une fonction continue partout n'admet pas de limite infinie en $x = a$.
- Il y a d'autres cas de discontinuité (fonction E , ...).

2.9 (*) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires

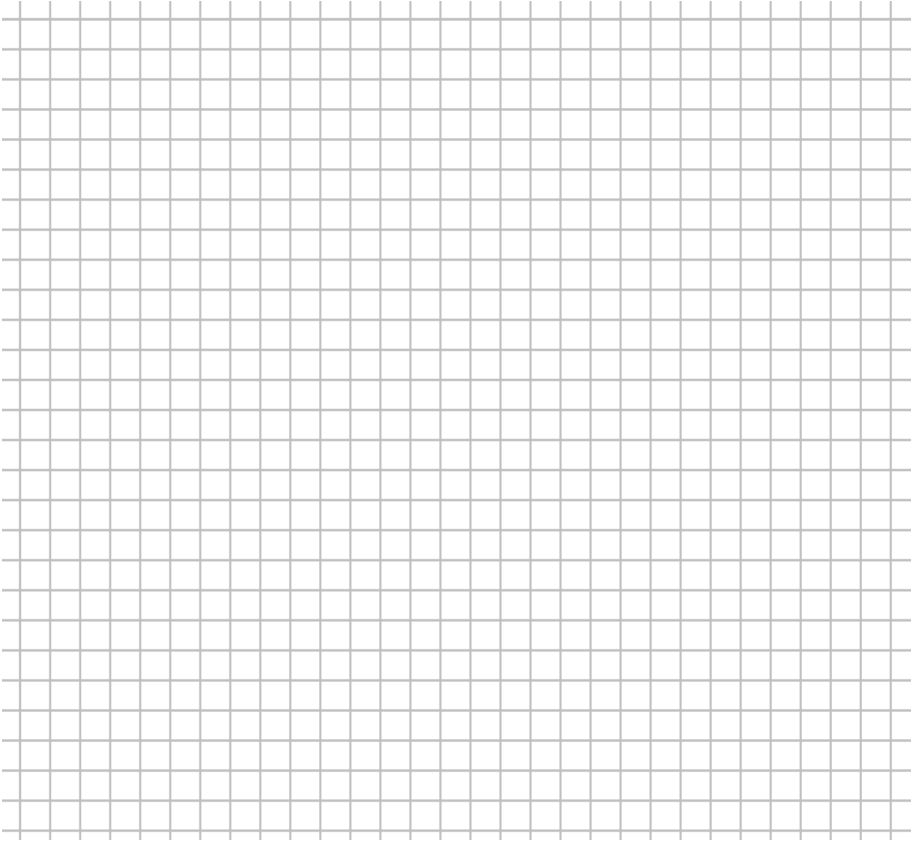
Lorsqu'une fonction f est continue dans $[a; b]$, alors toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'un x de $[a; b]$, au moins.

Faites une figure (ce résultat est admis).

2



Contre-exemple



Chapitre 3

Dérivées, valeurs extrémales, graphiques

Compétences à atteindre

1. Interpréter géométriquement $f'(x)$ d'une fonction.
2. Réaliser un tableau de variation qui correspond à une fonction donnée.
3. Réaliser un tableau de variation qui correspond à un graphique donné.
4. Représenter une situation, un problème à l'aide du graphique d'une fonction.

3.0 Prérequis

1. Factorise $2x^2 - 3x - 9$
2. Factorise $-x^2 + 3x + 4$
3. Factorise $-4x^2 + 4x - 1$
4. Donne 3 exemples et 3 contre-exemples de polynômes.
5. Divise $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$ par $x^2 + 4$.
6. Divise $-4x^3 + 7x^2 - 2x + 19$ par $x^2 - x + 1$.
7. Le polynôme $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8$ est-il divisible par $x + 2$? Dans l'affirmative, effectue la division.
8. Divise $-2x^3 + 7x + 5$ par $x + 3$.

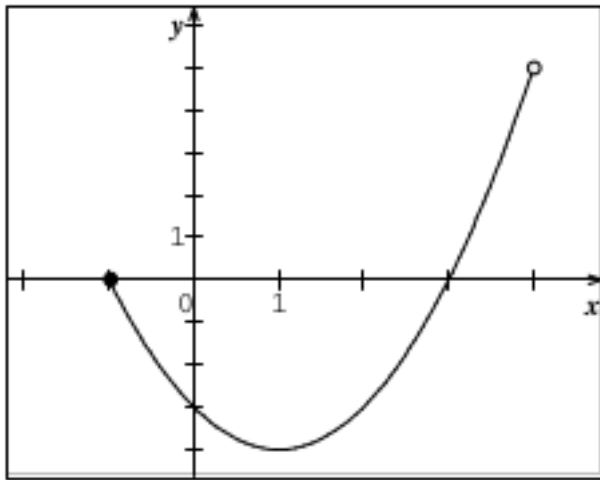
Domaine d'une fonction et ensemble-image

9. Détermine le domaine de la fonction f .

(a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

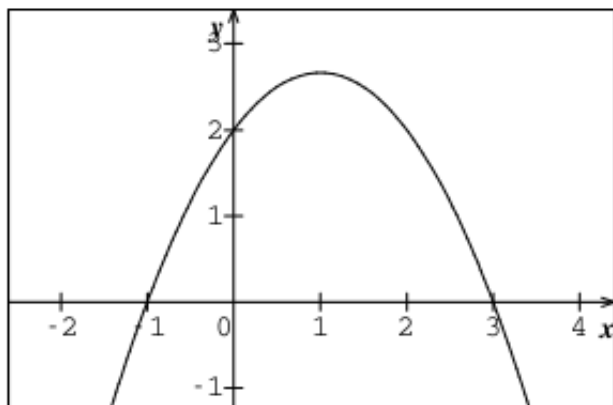
(b) $f(x) = \sqrt{4-x}$

10. Déterminez le domaine et l'ensemble-image de la fonction représentée.

**Exercices sur les points d'intersection avec les axes**

11. Déterminez le domaine et les points d'intersection avec les axes de la fonction f si $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$.

12. Pour la fonction f représentée,



détermine

$\text{dom } f$

$\text{im } f$

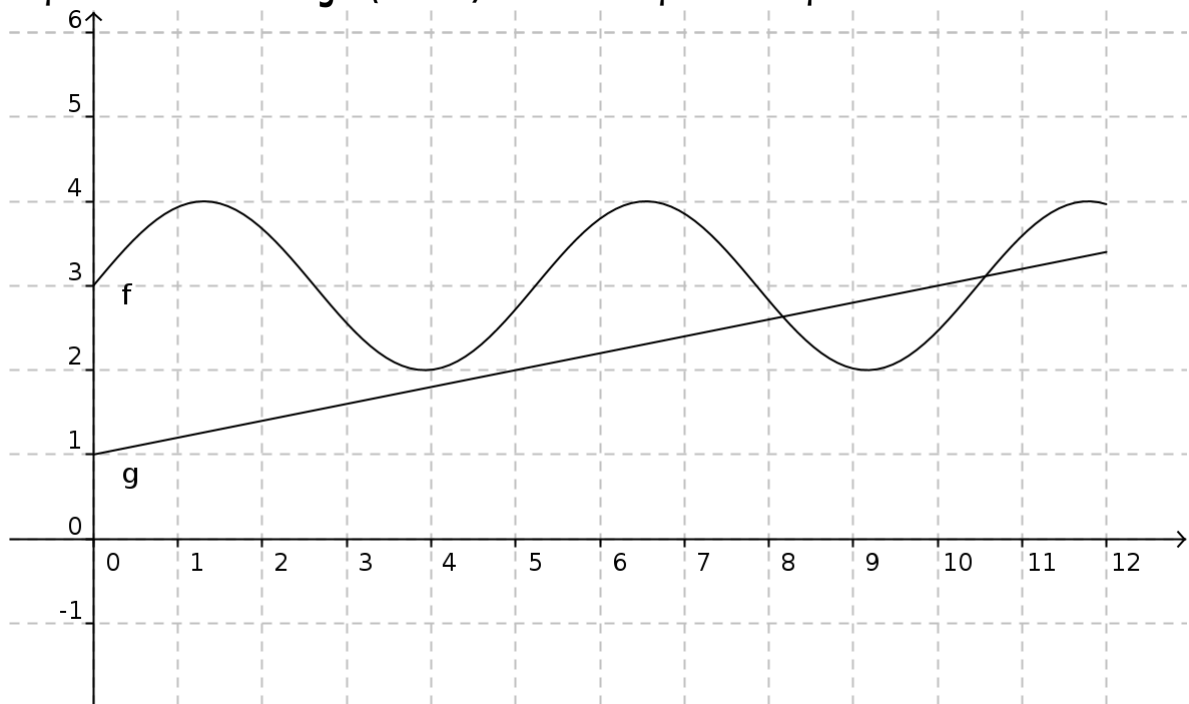
$$f \cap Ox$$

$$f \cap Oy$$

Opérations sur les fonctions

Exercice sur la somme

13. $f : x \rightarrow |x|$ et $g : x \rightarrow 2$. Représente $f + g$.
14. $f : x \rightarrow x^2$ et $g : x \rightarrow -4$. Représente $f + g$.
15. La fonction f représente le chiffre d'affaire d'une entreprise et la fonction g représente ses frais (en milliers d'euros). La différence des deux représente la marge (brute) de l'entreprise. Représentez-la.



Exercice sur le produit

16. $f : x \rightarrow x$ et $g : x \rightarrow 2$. Représente $f.g$.
17. $f : x \rightarrow x^2$ et $g : x \rightarrow -1$. Représente $f.g$.
18. $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$ et $g : x \rightarrow 3$. Représente $f.g$.

Exercices sur la composition

19. Détermine $\text{dom } f$, $\text{dom } g$, $f \circ g(x)$, $\text{dom}(f \circ g)$, $g \circ f(x)$ et $\text{dom}(g \circ f)$.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x-3}$

(b) $f(x) = 4x + 5$ et $g(x) = x^2$

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = 1 - 2x$

(d) $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = 3 + 2x$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ et $g(x) = 3 + 2x$

20. Décompose les fonctions suivantes en composées de fonctions de référence, $f = g \circ h$.

(f) $f(x) = (1 - x)^2$

(g) $f(x) = \sqrt{2 - x}$

(h) $f(x) = \sin(3x)$

(i) $f(x) = \cos(5x + 2)$

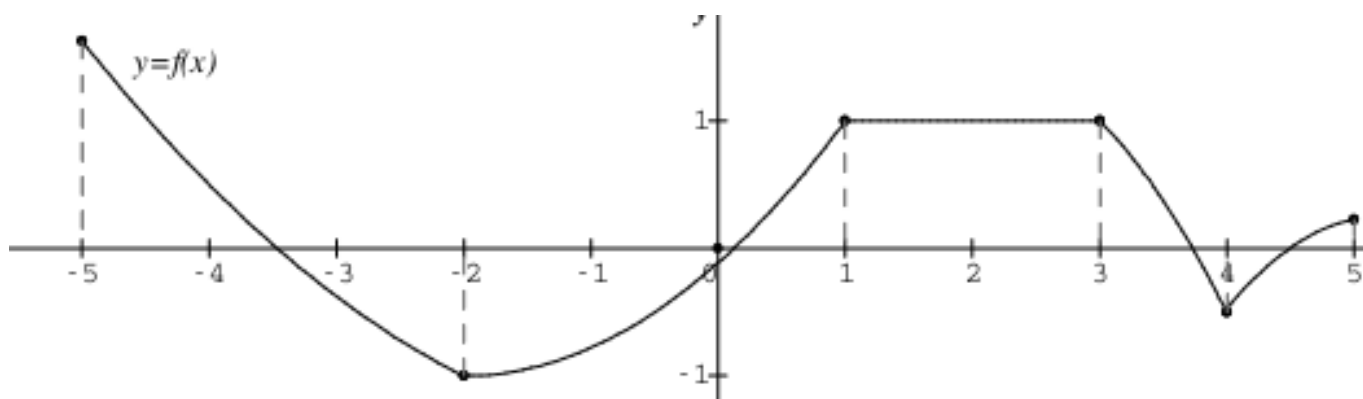
(j) $f(x) = (3x + 2)^3$

(k) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(l) $f(x) = |4 - x^2|$

Exercices sur la variation

21. Pour la fonction f ci-dessous,



$$\text{dom } f =$$

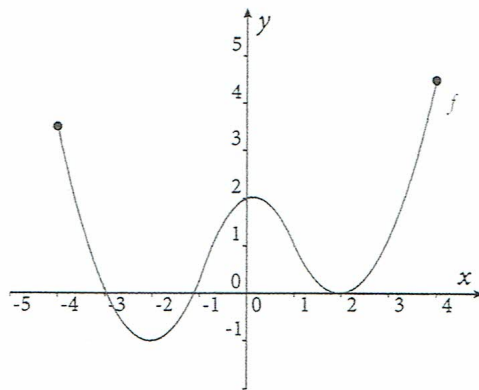
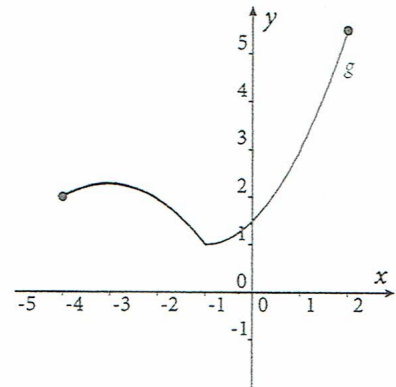
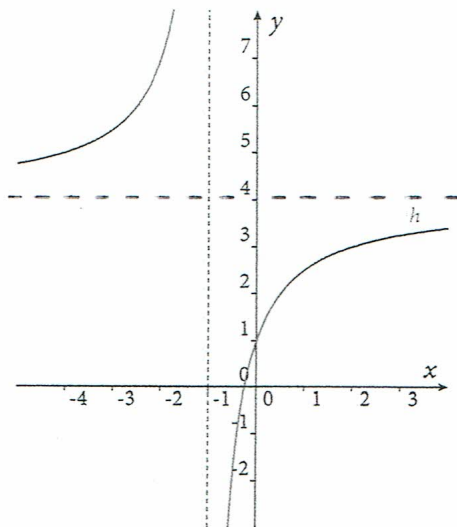
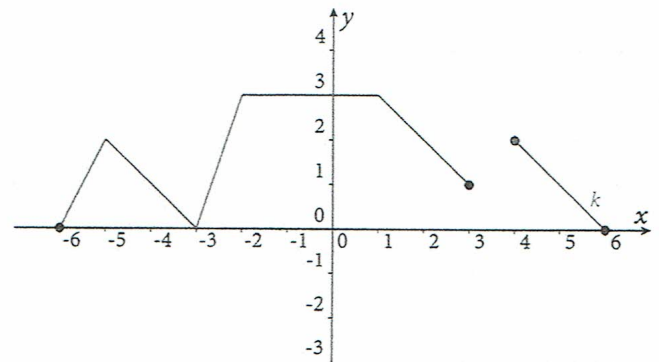
$$\text{im } f =$$

f est strictement croissante sur

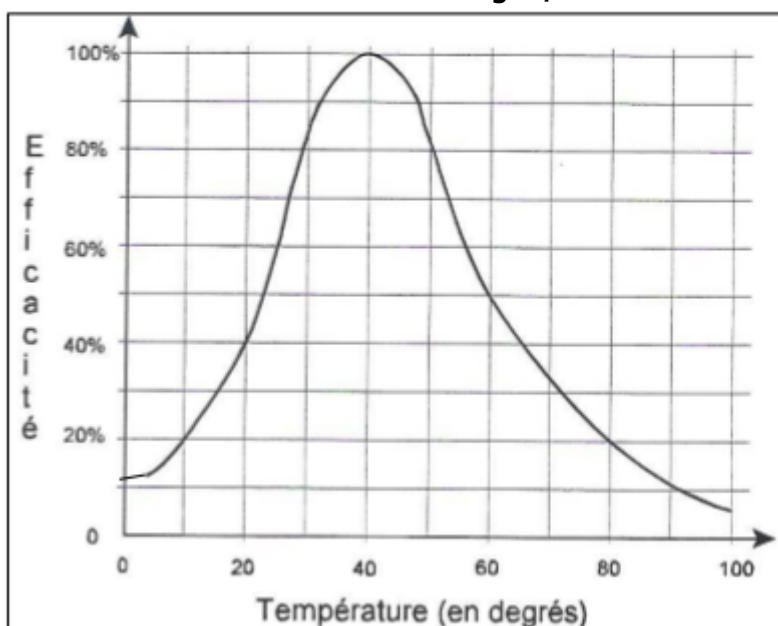
f est strictement décroissante sur

f est constante sur

22. Dresse le tableau de variation des fonctions représentées ci-dessous.



23. On étudie l'efficacité (en pourcentage) d'un gel à laver en fonction de la température d'utilisation de l'eau de lavage utilisée. On consigne les résultats de l'étude dans le graphe suivant :



- (a) Déterminez la température à laquelle le gel a la plus grande efficacité.
- (b) A quelle(s) température(s) l'efficacité du produit est-elle de 80%?
- (c) Déterminez l'intervalle de température qui permet au gel d'avoir une efficacité d'au moins 60%.
- (d) Décrivez les variations de la fonction proposée (croissance, décroissance, maximum, minimum).

Signe

24. Étudie le signe de

- (a) $3x - 7$
- (b) $x^2 - 5x + 6$
- (c) $4 - 3x$
- (d) $-x^2 - 5x + 6$
- (e) $x^2 - x + 6$
- (f) $4x - x^2 - 4$
- (g) $\frac{x^2 - 5x + 6}{3x - 7}$
- (h) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 1}$
- (i) $2x^3 - x^2 - 1$
- (j) $x^4 + x^3 - x - 1$
- (k) $\frac{5x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

QCM

1. La fonction $f : x \rightarrow -2x - 2$ contient les points

- a) $(0; -2)$ et $(1; 0)$
- b) $(0; -2)$ et $(-1; 0)$
- c) $(-1; 0)$ et $(2; 0)$

2. La pente de la fonction $f : x \rightarrow -2x - 2$ vaut
- 2
 - 2
 - 1
3. La fonction $f : x \rightarrow -2x - 2$ est
- positive pour $x = 1$ et négative pour $x = 10$.
 - positive pour $x = -4$ et positive pour $x = 10$.
 - positive pour $x = -10$ et négative pour $x = 1$.
4. La fonction $f : x \rightarrow -x^2 + 3x + 4$ contient les points
- $\left(\frac{3}{2}; \frac{25}{4}\right)$ et $(4; 10)$
 - $(0; -2)$ et $(-1; 0)$
 - $\left(\frac{3}{2}; \frac{25}{4}\right)$ et $(0; 4)$
5. La fonction $f : x \rightarrow -x^2 + 3x + 4$ est
- positive pour $x = 1$ et négative pour $x = 10$.
 - positive pour $x = -4$ et positive pour $x = 10$.
 - positive pour $x = -10$ et négative pour $x = 1$.
6. La fonction $f : x \rightarrow -x^2 + 3x + 4$ possède
- un maximum
 - un minimum
 - un minimum et un maximum.
7. La fonction $f : x \rightarrow -x^2 + x - 1$ contient les points
- $\left(\frac{3}{2}; \frac{25}{4}\right)$ et $(4; 0)$
 - $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$ et $(-1; 0)$
 - $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$ et $(0; -1)$
8. La fonction $f : x \rightarrow -x^2 + x - 1$ est
- positive pour $x = 1$ et négative pour $x = 10$.
 - négative pour $x = -4$ et négative pour $x = 10$.
 - positive pour $x = -10$ et négative pour $x = 1$.
9. La fonction $f : x \rightarrow -x^2 + x - 1$ possède
- un maximum
 - un minimum
 - un minimum et un maximum.
10. a) $2x^2 - 3x - 9 = (x - 3) \left(x + \frac{3}{2}\right)$

b) $2x^2 - 3x - 9 = 2(x - 3) \left(x + \frac{3}{2}\right)$

c) $2x^2 - 3x - 9 = (x - 3)(2x + 3)$

11. a) $-x^2 + 3x + 4 = (x + 1)(x - 4)$

b) $-x^2 + 3x + 4 = -(x + 1)(x - 4)$

c) $-x^2 + 3x + 4 = -(x - 1)(x + 4)$

12. Le domaine de $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ est

a) $]1; \rightarrow[$

b) $] -1; 1[$

c) $[-1; 1[$

13. Le domaine de $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-5}}$ est

a) $]5; \rightarrow[$

b) $] \leftarrow; 2] \cup]5; \rightarrow[$

c) $] \leftarrow; 2[\cup]5; \rightarrow[$

14. Le domaine de $f(x) = \frac{3-x}{\sqrt{9-x^2}}$ est

a) $]3; \rightarrow[$

b) $] -3; 3[$

c) $] \leftarrow; -3[\cup]3; \rightarrow[$

15. Le domaine de $f(x) = \frac{1+x^2}{4-x^2}$ est

a) $]2; \rightarrow[$

b) $] -2; 2[$

c) $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

3.1 A quoi sert la dérivée d'une fonction ?

La dérivée de la fonction f est une fonction f' qui indique comment la fonction f varie.

Exemple

La dérivée de $f(x) = x^2 - x - 1$ est $f'(x) = 2x - 1$.

Cela signifie que le signe de f' indique si la fonction f est croissante ou décroissante.

Plus précisément,

x		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	m	$\nearrow$

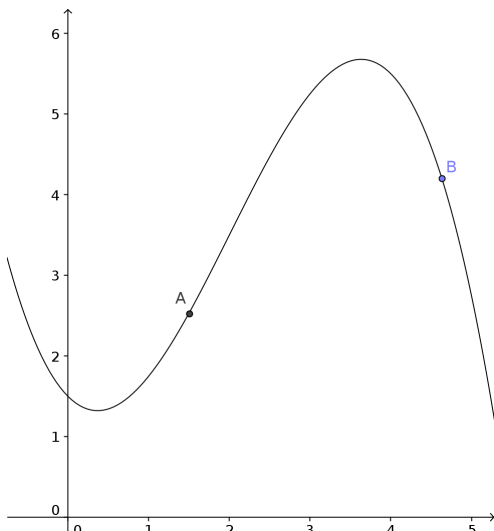
Note la présence d'un minimum en $x = \frac{1}{2}$.

Exercice

Sachant que la dérivée de $f(x) = -x^2 + 3x - 7$ est $f'(x) = -2x + 3$, dresse le tableau de variation de f .

3.2 Sécantes et tangente

Appelle x l'abscisse du point A et $x+h$ l'abscisse du point B . Note aussi leurs ordonnées. Trace la sécante qui joint les points A et B .



La pente de cette sécante est donnée par

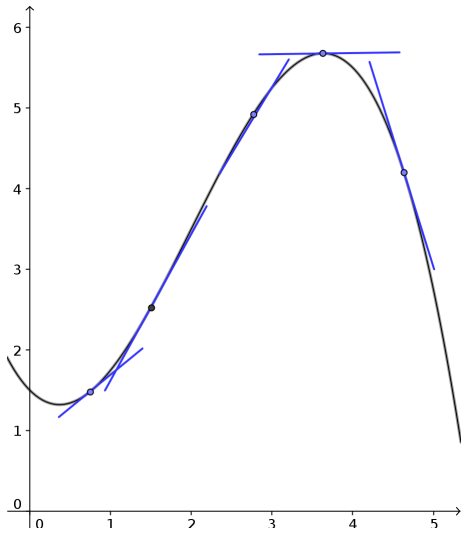
Que se passe-t-il si nous prenons h proche de 0 ? Se pourrait-il que la sécante soit aussi proche qu'on veut d'une droite particulière ?

La pente de cette hypothétique droite, appelée tangente est donnée par

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Intuitivement, la tangente existe en un point de f si celui-ci ne forme pas un “coin” (comme valeur absolue en 0).

Dans tout ce qui suit, cette tangente existe, sauf mention explicite du contraire.



Ainsi, nous pouvons donner en chaque point d'une fonction *régulière*, la

définition

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Définition

La fonction f' est appelée dérivée de la fonction f .

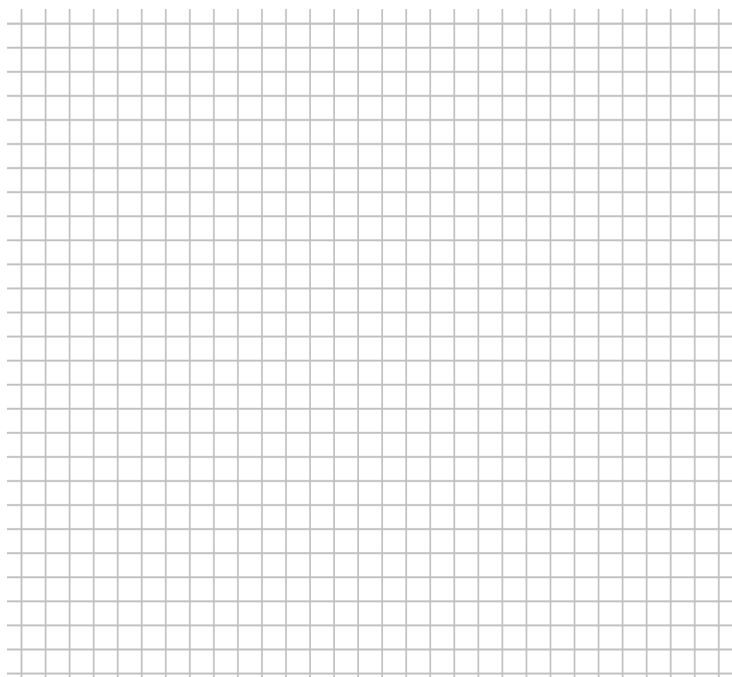
En pratique

$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ est la pente de la tangente au point d'abscisse x .

3.3 Dérivée des fonctions de référence

1. Si $f(x) = k$ (constante) alors $f'(x) = 0$.

En bref, $(k)' = 0$.



La pente de cette droite est visiblement 0.

Exercice

Tangente au graphe de $f : x \rightarrow 3$ au point $(1; 3)$.

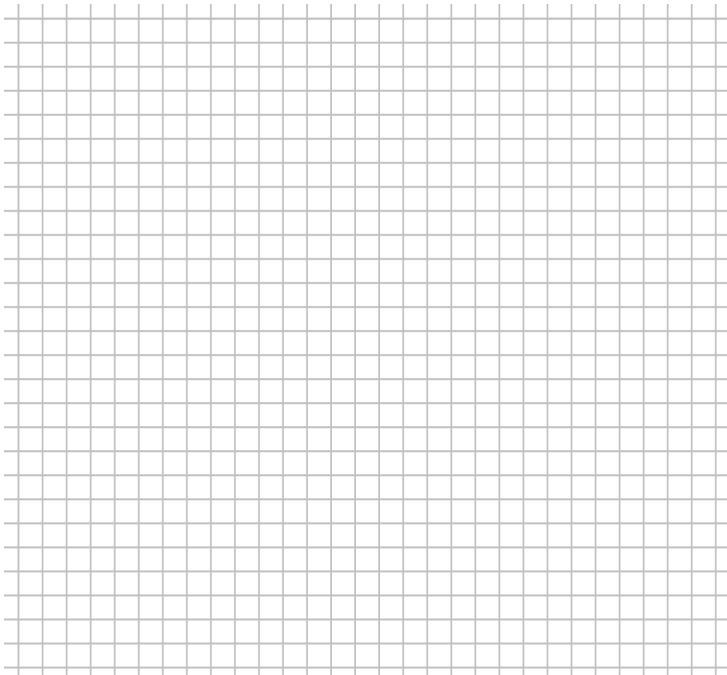
(a) Détermine la pente de cette tangente.

(b) Trace cette tangente.

(c) Détermine une équation de cette tangente.

2. Si $f(x) = x$ (identique) alors $f'(x) = 1$.

En bref, $(x)' = 1$.



La pente de cette droite est visiblement 1.

Exercice

Tangente au graphe de $f : x \rightarrow x$ au point $(1; 1)$.

- (a) Détermine la pente de cette tangente.
- (b) Trace cette tangente.
- (c) Détermine une équation de cette tangente.

3. Si $f(x) = x^2$ (carré) alors $f'(x) = 2x$.

En bref, $\boxed{(x^2)' = 2x}$.



Exercice

Tangente au graphe de $f : x \rightarrow x^2$ au point $(1; 1)$.

- (a) Détermine la pente de cette tangente.
- (b) Trace cette tangente.
- (c) Détermine une équation de cette tangente.

4. Si $f(x) = \frac{1}{x}$ (inverse) alors $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. En bref, $\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$.

Exercice

La tangente au graphe de $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$ au point $(2; \frac{1}{2})$.

- (a) Détermine la pente de cette tangente.
- (b) Trace cette tangente.
- (c) Détermine une équation de cette tangente.

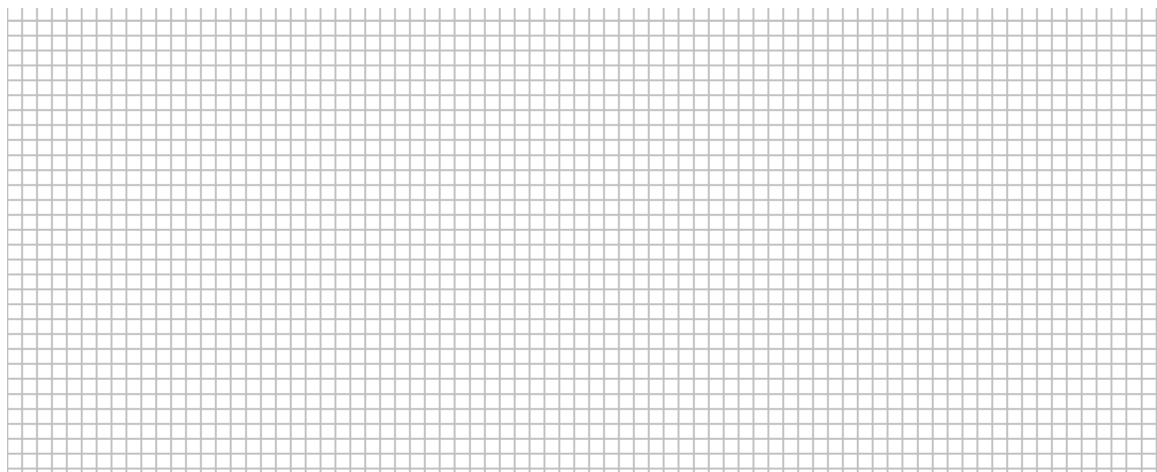


5. Si $f(x) = \sqrt{x}$ (radical) alors $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. En bref, $\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$.

Exercice

La tangente au graphe de $f : x \rightarrow \sqrt{x}$ au point $(4; 2)$.

- (a) Détermine la pente de cette tangente.
- (b) Trace cette tangente.
- (c) Détermine une équation de cette tangente.



6. Si $f(x) = x^n$ (puissance n) alors $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. En bref, $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Exercice

La tangente au graphe de $f : x \rightarrow x^3$ au point $(\frac{1}{2}; \frac{1}{8})$.

- (a) Détermine la pente de cette tangente.
- (b) Trace cette tangente.
- (c) Détermine une équation de cette tangente.



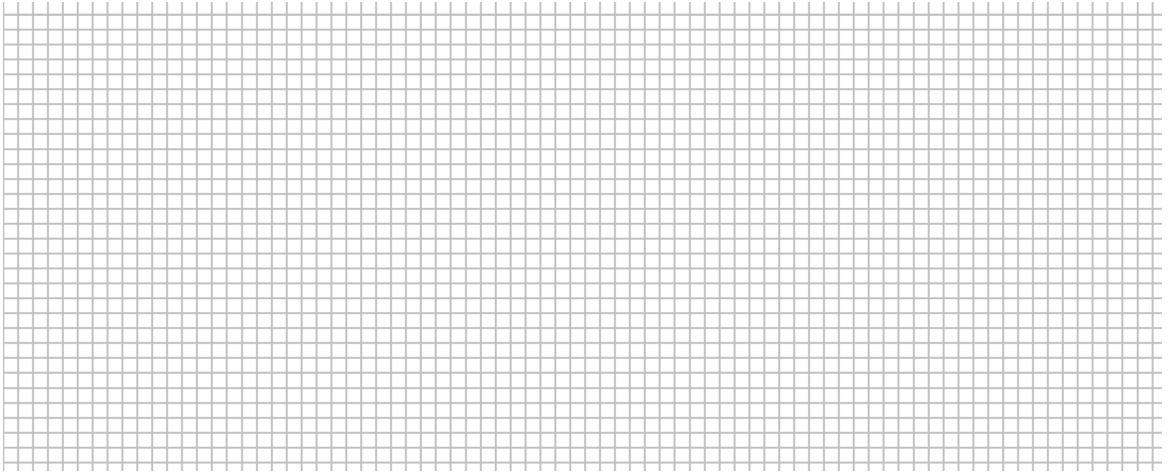
7. La dérivée de la fonction $\sin$ est la fonction $\cos$.

Exercice

La tangente au graphe de $\sin$ au point $(0; 0)$.

- (a) Détermine la pente de cette tangente.
- (b) Trace cette tangente.

(c) Détermine une équation de cette tangente.



8. La dérivée de la fonction **COS** est la fonction **− sin**.

9. La dérivée de la fonction **tan** est $\frac{1}{\cos^2}$, autrement dit $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

3.4 Dérivée et opérations

1. $(f + g)' = f' + g'$

Exemples :

(a) $(\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x$

(b) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)' = 2x - \frac{1}{x^2}$

2. $(k.f)' = k.f'$

Exemples :

(a) $(3 \sin x)' = 3 \cos x$

(b) $\left(\frac{x^2}{10}\right)' =$

(c) $\left(\frac{8}{x}\right)' =$

3. $(f.g)' = f'.g + f.g'$

Exemple :

$(\sin x . \cos x)' = (\sin x)' \cos x + \sin x . (\cos x)' =$

4. $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

5.
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

6.

Exercices

1. Calcule

a) $(2x - 3x^2 + 4x^4)'$	l) $\left(\frac{2-3x}{4x+5}\right)'$
b) $(5 - 4x^2 + 7x^3)'$	m) $\left(\frac{4-5x}{3x^2-x+2}\right)'$
c) $((x^2+1)(1-x^2-x^4))'$	n) $\left(\frac{4x^2+3x-1}{5x^2-2x}\right)'$
d) $((2x^2-3x+1)(5x-3))'$	o) $\left(\frac{5x^2-2x}{4x^2+3x-1}\right)'$
e) $\left(3x + \frac{5}{x^2}\right)'$	p) $(x \cdot \sqrt{1+2x^2})'$
f) $(5(x^2+4x-1)^2)'$	q) $\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\right)'$
g) $\left(\left(\frac{1}{2x+1}\right)^3\right)'$	r) $\left(\frac{x-1}{(2x+1)^3}\right)'$
h) $(\sqrt{4x^2-x+1})'$	s) $(x \cdot (x^2-1)^3)'$
i) $(3\sin x)'$	t) $\left(\frac{4x^2-x+2}{(x+2)^2}\right)'$
j) $(\cos(3x+2))'$	u) $\left(\frac{(3x-1)^2}{2x}\right)'$
k) $(x \cdot \sin x)'$	v) $\left(\frac{1}{\sin x}\right)'$

2. Deuxième série

- (a) $\left(\frac{3x \cdot (1-x)}{2-x}\right)'$
- (b) $\left(\left(\frac{1}{x} - 3\right)(x^2-1)\right)'$
- (c) $\left(\sqrt{\frac{2x-1}{1-x}}\right)'$
- (d) $\left(\frac{\sqrt{x-1}}{2x+4}\right)'$
- (e) $(x \cdot \sqrt{x^2-1})'$
- (f) $(5x - \sqrt{x^2-9})'$
- (g) $(\tan(4x+1))'$

(h) $(\tan x \cdot (\tan x - 1))'$

(i) $(\cos^2 x - 3 \cos x + 1)'$

(j) $(\sqrt{\cos 2x})'$

(k) $\left(\frac{1}{(2x+1)^2}\right)'$

3. Détermine une équation de la tangente au graphe de $f : x \rightarrow x^2 - x - 1$ au point $(2; 1)$.

4. Détermine une équation de la tangente au graphe de $f : x \rightarrow \frac{1}{3x-1}$ au point d'abscisse $\frac{1}{3}$.

5. Détermine une équation de la tangente au graphe de $f : x \rightarrow \sqrt{2x-4}$ au point d'abscisse 3.

6. (Ex 21) On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par l'expression $f(x) = \sqrt[3]{x} - x^{-\frac{1}{6}}$

Que vaut la dérivée de cette fonction en $x = 1$?

7. (Ex 22) On considère la dérivée f' de la fonction f définie par

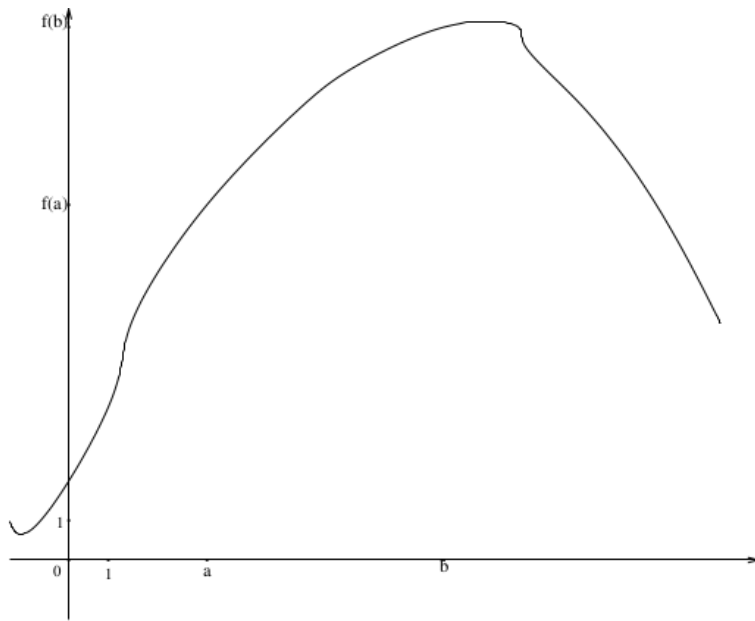
$$f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt{x^3}$$

Que vaut la dérivée de cette fonction en $x = 1$?

3.5 Dérivée et variation

La dérivée d'une fonction indique comment cette fonction varie.

Plus précisément, si $f'(x) > 0$ dans un intervalle, alors f y est strictement croissante. Ce résultat admis est illustré ci-dessous.



Dans l'intervalle $]a; b[$, la pente de la tangente est toujours positive, ce qui indique que $f'(x) > 0$. Visiblement, f y est strictement croissante.

Bien entendu, si $f'(x) < 0$ dans un intervalle, alors f y est strictement décroissante.

Exercice

Étudier la variation des fonctions suivantes.

1. $f : x \rightarrow x^3 - 3x^2 + 5$
2. $f : x \rightarrow \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$
3. $f : x \rightarrow \frac{2 - 3x}{4x + 5}$

3.6 Variation d'autres fonctions

Étudie la variation de la fonction f (avec domaine et compléments pour les x très grands, très petits ou sans image) et représente-la à l'aide d'un logiciel :

1. $f(x) = x^3 + x^2 - 8x$
2. $f(x) = \frac{2x + 1}{3 - x}$

3. $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + 1}$

4. $f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$

5. (Ex 23) On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par l'expression

$$f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} - 15x + 12$$

Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ cette fonction est-elle strictement croissante ?

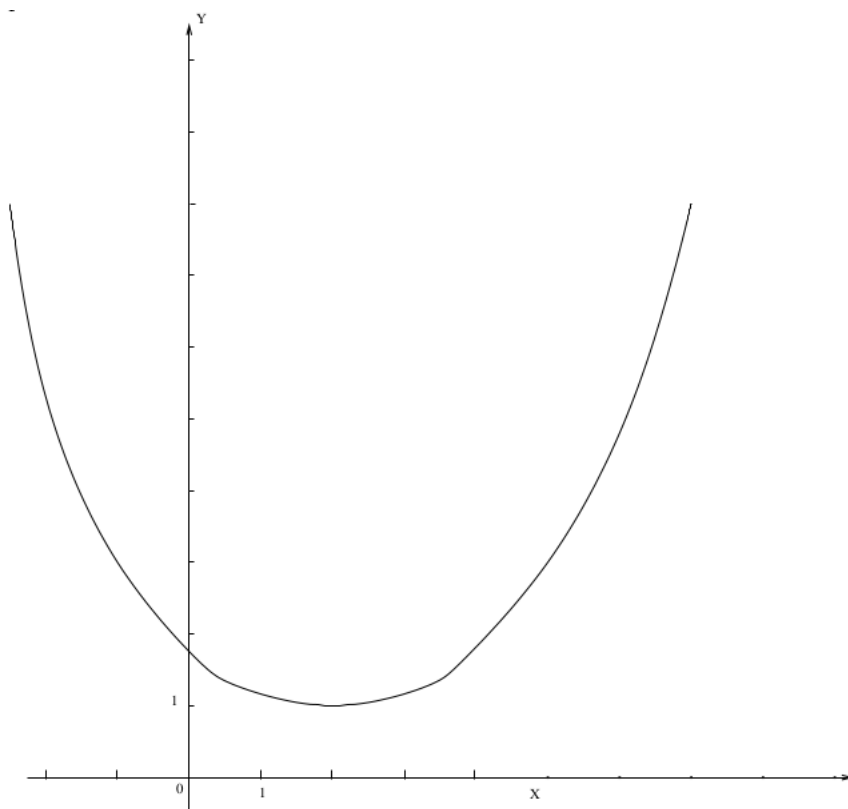
6. (Ex 25) Dans un grand lac, l'évolution du nombre de truites $N(t)$ ($N(t) > 0$) au cours du temps t (en années) obéit à :

$$N'(t) = 0,3N(t) - 0,06t.N(t)$$

Pendant combien d'années le nombre de truites augmentera dans ce lac ?

3.7 Dérivée seconde

La dérivée seconde est la dérivée de la dérivée. Elle indique donc comment la dérivée varie. Regardons plutôt :



Trace une dizaine de tangentes à cette courbe. Tu constates que la dérivée première

La dérivée seconde est positive, signe que la concavité de la courbe est tournée vers le haut. On parle alors de concavité positive. Lorsque la dérivée seconde est négative, la concavité de la courbe est tournée vers le bas (concavité négative).

Exercices

1. Calcule la dérivée seconde de chacune des fonctions étudiées au point précédent. Fais le tableau de concavité. Compare avec le graphique que tu as tracé. Un point où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe est appelé **point d'inflexion**.
2. Étudie la variation et la concavité de la fonction du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.
3. (Ex 21) Au cours de l'étude d'une fonction f d'une variable réelle x , on note l'observation suivante pour la valeur particulière x_0 :

$$f(x_0) f'(x_0) f''(x_0) < 0$$

Quelle proposition est correcte ?

- (a) $f(x_0) < 0$ f est croissant en x_0 et sa concavité est tournée vers le bas en ce point
- (b) $f(x_0) > 0$ f est décroissant en x_0 et sa concavité est tournée vers le bas en ce point
- (c) $f(x_0) > 0$ f est décroissant en x_0 et sa concavité est tournée vers le haut en ce point
- (d) $f(x_0) < 0$ f est décroissant en x_0 et sa concavité est tournée vers le haut en ce point.

partie III

Comprendre (m64)

Chapitre 1

Fonctions Réciproques

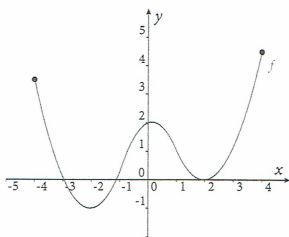
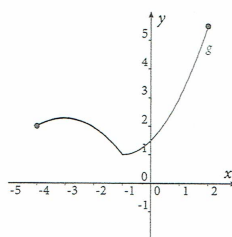
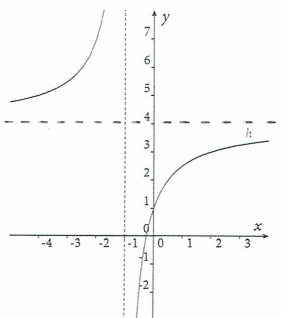
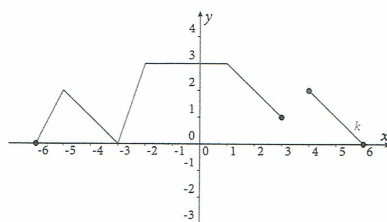
Compétences à atteindre

1. Les caractéristiques d'une fonction étant connues ou données, déterminer celles de la fonction réciproque.
2. Construire le graphique de f^{-1} au départ de celui de f .

1.0 Prérequis

Variation d'une fonction

1. Dresse le tableau de variation des fonctions représentées ci-dessous.



1.1 Relation réciproque

Une relation ou une fonction peut se représenter dans un tableau.

Exercices

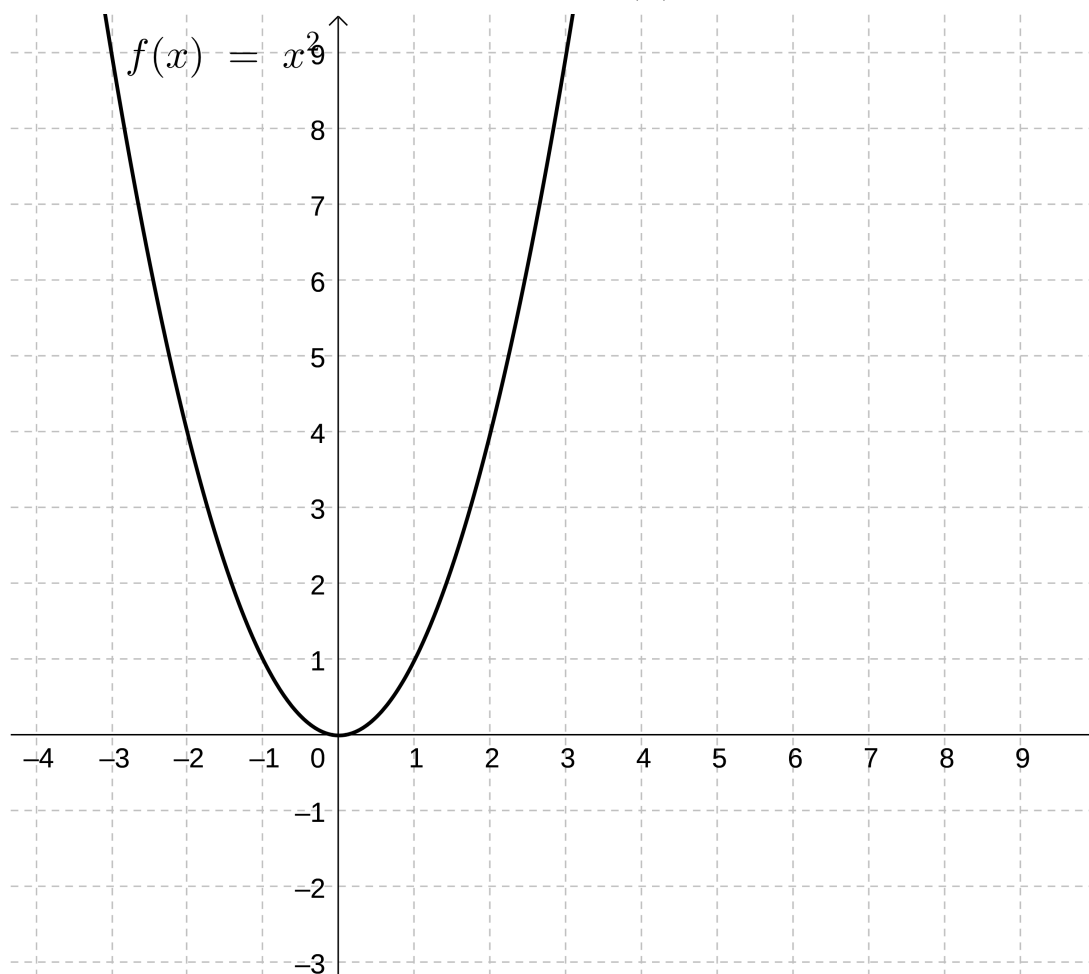
2. Fonction ou simple relation (non-fonctionnelle)? Essaie de la retrouver!

a)	x	y	b)	x	y	c)	x	y
	1	-2		1	1		1	1
	2	-1		2	4		2	2
	3	0		3	9		3	3
	4	1		4	16		4	4
	0	-3		0	0		0	0
	-1	-4		-1	1		1	-1
	-2	-5		-2	4		2	-2
d)	x	y	e)	x	y		3	-3
	1	-5		1	1		1	1
	2	-2		2	4		2	-2
	3	-6		3	9		3	-3
	4	1		4	16		4	4
	0	-3		0	0		0	0
	-1	-4		-1	1		1	-1
	-2	-5		-2	4		2	-2
	x	y		x	y		x	y
	1	1		1	1		1	1
	2	$\frac{1}{2}$		2	$\frac{1}{2}$		2	$\frac{1}{2}$
	3	$\frac{1}{3}$		3	$\frac{1}{3}$		3	$\frac{1}{3}$
	4	$\frac{1}{4}$		4	$\frac{1}{4}$		4	$\frac{1}{4}$
	-1	-1		1	-1		1	-1
	-2	$-\frac{1}{2}$						
	-3	$-\frac{1}{3}$						
	$\frac{1}{2}$	2						

En inversant les deux colonnes, on obtient la relation réciproque. Fais-le.

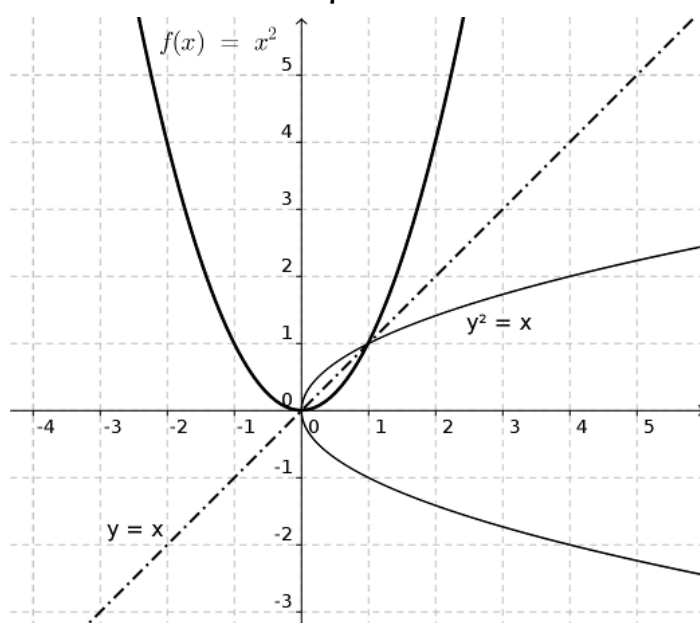
Symétrie des graphes

Reprenons le deuxième exemple : $f(x) = x^2$.



Pour la relation réciproque, il suffit de permuter x et y .

Fais-le et relie les points.



Les deux graphiques sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

La fonction f a pour équation $y = x^2$. Sa relation réciproque a donc pour équation $x = y^2$, c'est à dire $y = \sqrt{x}$ ou $y = -\sqrt{x}$.

Cela nous amène à la question suivante :

La réciproque d'une fonction est-elle une fonction ?

Au vu de l'exemple précédent, la réponse est non ! Pourquoi ?

Pour une fonction, x a une seule image, $f(x)$. Mais il est possible que deux x différents aient la même image. La relation réciproque va donc associer à cette image plusieurs x , et ne sera pas une fonction.

Pour que la réciproque de la fonction f soit une fonction, il faut que 2 x différents aient deux images différentes.

On dit alors que la fonction f est **injective**.

Exemple fondamental

Une fonction strictement croissante¹ est injective.

Exercices

3. Justifie que les fonctions suivantes sont injectives.

(a) $f : x \rightarrow x + 2$

(b) $g : x \rightarrow \sqrt{x}$

(c) $h : x \rightarrow \sqrt{x + 2}$.

4. Justifie que la fonction f n'est pas injective.

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = |x|$

(c) $f(x) = \sin x$

¹dans $\mathbb{R}$ ou dans un intervalle

Notation

La fonction réciproque de la fonction f est notée f^{-1} .

Domaine

Le domaine de f^{-1} est $f(A)$.

1.2 Exercices

Pour la fonction f , indique

- a) si elle est injective dans son domaine ;
- b) sinon, précise dans quelle intervalle elle l'est et pourquoi.
- c) Détermine $f^{-1}(x)$.
- d) Dessine le graphe de f (restreinte) et celui de f^{-1} .
- e) Détermine le domaine de f^{-1} .

1. $f(x) = 4x^2$

2. $f(x) = x^3$

3. $f(x) = \sin x$

4. $f(x) = \cos x$

5. $f(x) = \tan x$

Chapitre 2

Exponentielles et Logarithmes

Compétences à atteindre

1. Justifier le passage d'une expression logarithmique (ou exponentielle) à une autre.
2. Connaître les propriétés du logarithme d'un produit, d'une puissance.
3. Énoncer les propriétés communes d'une famille de fonctions logarithmiques ou exponentielles.
4. Résoudre des équations et des inéquations logarithmiques ou exponentielles simples.
5. Dériver des fonctions logarithmes ou exponentielles.
6. Rechercher des limites de fonctions logarithmiques ou exponentielles.
7. Interpréter un graphique en le reliant au problème qu'il modélise.
8. Résoudre un problème au moyen des fonctions logarithmiques ou exponentielles.

2.0 Prérequis

Signe

1. Étudie le signe de

(a) $3x - 7$

(b) $x^2 - 5x + 6$

(c) $4 - 3x$

(d) $-x^2 - 5x + 6$

(e) $x^2 - x + 6$

(f) $4x - x^2 - 4$

(g) $\frac{x^2 - 5x + 6}{3x - 7}$

(h) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 1}$

(i) $2x^3 - x^2 - 1$

Dérivée et tangente en un point d'une fonction

2. La dérivée de $f(x) = x^2 - x - 1$ est $f'(x) = 2x - 1$.

Dresse le tableau de variation de f .

Trace ensuite le graphique de f .

Calcule la pente de la tangente au point $(2; 1)$ et trace cette tangente.

3. La dérivée de $f(x) = -x^2 + 3x - 7$ est $f'(x) = -2x + 3$.

Dresse le tableau de variation de f .

Trace ensuite le graphique de f .

Calcule la pente de la tangente au point $(2; -5)$ et trace cette tangente.

Limite en un réel

4. Que signifie $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}$?

5. Que signifie $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2} = +\infty$?

Limite à l'infini

6. Que signifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 5} = \frac{1}{2}$?

7. Que signifie $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x - 2)^2} = 0$?

8. Que signifie $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^3}{(x - 2)^2} = +\infty$?

Incursion

9. Considérons la fonction $s : n \rightarrow (0, 5)^n$ où n est un entier positif.

(a) Calculez $s(0)$, $s(1)$, $s(2)$, $s(3)$ et $s(4)$ et montrez qu'il s'agit d'une suite géométrique.

(b) Représentez les points obtenus.

(c) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} s(n)$?

(d) Prenons maintenant n entier négatif. Calculez $s(-1)$, $s(-2)$, et $s(-3)$ et ajoutez les points obtenus.

(e) Que vaut $\lim_{n \rightarrow -\infty} s(n)$?

(f) Pouvez-vous relier les points obtenus ?

10. Pendant un certain temps, une population de bactéries double d'heure en heure. A l'instant initial, la population est composée de 1 million de bactéries.

(a) Établissez un tableau, un graphique et une formule donnant le nombre de bactéries à l'instant initial et après 1 heure, 2 heures, 3 heures.

(b) Avec le même schéma, combien y aura-t-il de bactéries après 1/2 heure, 1 heure et demi, deux heures et demi, 3 heures et demi ? Justifiez et complétez le tableau et le graphique.

(c) Combien y avait-il de bactéries une heure avant l'instant initial, deux heures avant, trois heures avant cet instant ? Complétez le graphique.

- (d) Par combien est multipliée la population de bactéries de quart d'heure en quart d'heure ?
- (e) Pouvez-vous relier les points obtenus ?

Exemples de suites géométriques

- Les bactéries de l'exercice précédent, d'heure en heure.
- Les bactéries de l'exercice précédent, de demi-heure en demi-heure.
- La suite $2, 1, 2^{-1}, 2^{-2}, \dots$

Exposants rationnels

11. Calcule

(a) $4^{\frac{5}{2}}$

(b) $9^{\frac{3}{2}}$

(c) $27^{\frac{4}{3}}$

(d) $8^{\frac{7}{3}}$

(e) $25^{\frac{3}{2}}$

(f) $0,027^{\frac{4}{3}}$

(g) $16^{\frac{3}{4}}$

(h) $32^{\frac{6}{5}}$

12. (Ex 21) L'expression $\sqrt{x^5}$ ($x > 0$)

- (i) Exprimez-la sous forme de puissance à exposant rationnel.
- (j) Quelle expression lui est égale ?

$$\frac{x^3}{\sqrt{x}} \quad x^3\sqrt{x} \quad x^3 - \sqrt{x} \quad \sqrt[5]{x^2}$$

13. (Ex 25) Un jeune enfant s'amuse avec une calculatrice à faire des additions de nombres de plus en plus grands. Il commence par $1+1$, puis additionne le résultat à lui-même, et recommence à chaque étape.

Il effectue ainsi successivement : $1+1$, $2+2$, $4+4$, et ainsi de suite.

Si n est un nombre entier non nul désignant le nombre d'étapes, quel est le résultat obtenu par l'enfant après n étapes ?

2.1 Exponentielles de base quelconque

2.1.1 Exercice

1. Exprime les nombres suivants avec des exposants entiers positifs.

(a) 4^{-2}

(b) $5^{0,75}$

(c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1,75}$

(d) $9^{\frac{1}{2}} \cdot 27^{\frac{2}{3}}$

(e) $\frac{4^{1,25}}{16^{0,75}}$

Exponentielle de base 2

$$2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$$

$$2^0 = 1$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^1} = \sqrt{2}$$

$$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$$

$$2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$$

$$2^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$$

Et avec 2^π ?

π est compris entre 3,14 et 3,15.

Imposons que 2^π soit compris entre $2^{3,14}$ et $2^{3,15}$

$$2^{\frac{314}{100}} < 2^\pi < 2^{\frac{315}{100}}$$

$$\sqrt[100]{2^{314}} < 2^\pi < \sqrt[100]{2^{315}}$$

Bien que théorique, cette méthode permet d'obtenir 2^π avec la précision souhaitée

par exemple avec $2^{3,1415} < 2^\pi < 2^{3,1416}$.

Il est ainsi possible de calculer n'importe quelle puissance à exposant réel de 2.

2.1.2 Théorème de fondation

Il est aussi possible de calculer une puissance à exposant réel de n'importe quel nombre **strictement positif**.¹

$$a^x$$

A partir de maintenant, $a > 0$ et $a \neq 1$.

Définition

La fonction qui à x associe a^x est appelée *exponentielle de base a* et notée $\exp_a$.

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow a^x$$

$$\exp_a(x) = a^x$$

Théorème

La fonction qui à x associe a^x

respecte les formules

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

et est dérivable dans $\mathbb{R}$.

Ce théorème est admis.

¹Ce n'est pas possible pour un nombre négatif.

Exemples

- $\exp_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 3^x$ est l'exponentielle de base 3.
- $\exp_{0,5} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 0,5^x$ est l'exponentielle de base 0,5.
- $\exp_{10} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 10^x$ est l'exponentielle de base 10 (exponentielle décimale).

Propriétés

1) a^x est strictement positif : $a^x > 0$.

2) $a^0 = 1$ et que $a^1 = a$ ce qui donne le tableau

x	a^x
0	1
1	a

pour les graphiques.

Exercice

2. A l'aide de la calculatrice, donne une valeur arrondie (4 décimales) de

a) $2^{\sqrt{3}}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{7}}$

c) $(0,2)^\pi$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt[3]{5}}$

Dérivée

Connais-tu une fonction qui est égale à sa dérivée ?

Il n'y en a pas dans le cours de l'année passée...

La dérivée d'une fonction exponentielle est un multiple de celle-ci :

$$\exp'_a(x) = k \cdot \exp_a(x) \text{ ou encore } \boxed{(a^x)' = k \cdot a^x}$$

Note que la constante k ne dépend pas de x mais bien de a .

Variation

1. Si $a > 1$

x	
$(a^x)'$	+
a^x	$\nearrow$

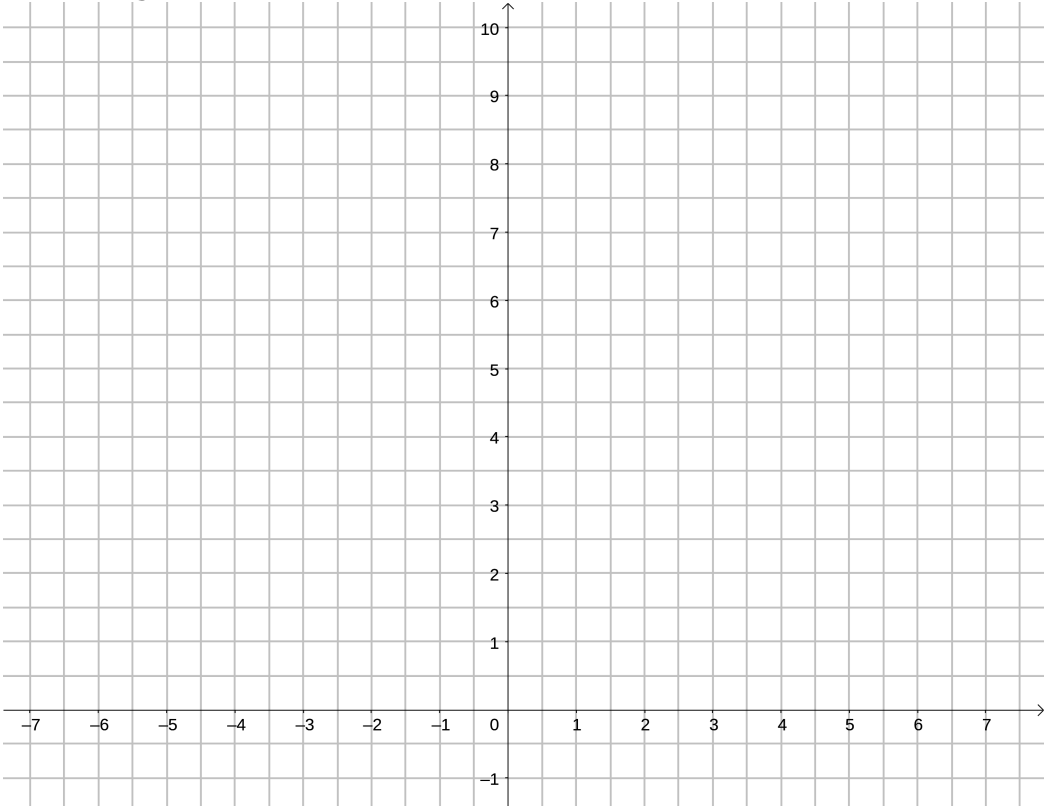
2. Si $a < 1$

x	
$(a^x)'$	-
a^x	$\searrow$

Limites et graphiques

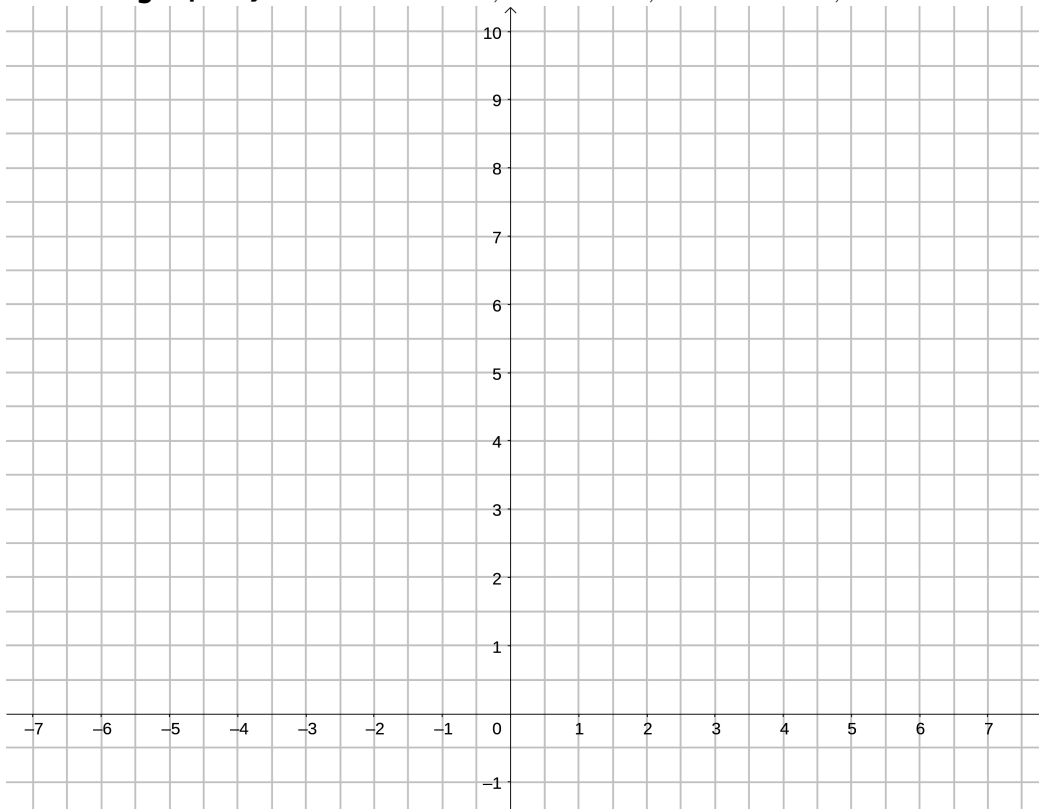
3. a) Lorsque $a > 1$, $\lim_{h \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{h \rightarrow -\infty} a^x = 0$

Fais un graphique avec $a = 1,5$ $a = 2$ et $a = 10$.



b) Lorsque $0 < a < 1$, $\lim_{h \rightarrow +\infty} a^h = 0$ et $\lim_{h \rightarrow -\infty} a^h = +\infty$

Fais un graphique avec $a = 0,75$, $a = 0,5$ et $a = 0,1$.



Exercices

4. Calcule et interprète

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^x$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (0,27)^{x-2}$

5. Selon l'OMS, le nombre de malade du SIDA était donné, de 1984 à 1987, par la formule $f(t) = e^{0,77t+6}$ où t représente le nombre d'années depuis 1984.

(e) Calcule le nombre de malades en 1985, 1986 et 1987. Interprète.

(f) Fais un graphique.

(g) Exprime la variation de cette fonction.

(h) Si le modèle de l'OMS était toujours valable, combien y aurait-il de malades cette année ?

6. (Ex 22) Une culture de cellules, débutée au départ d'une seule cellule, croît selon une loi exponentielle. On souhaite comparer les intervalles de temps correspondant à différentes variations de population.

L'intervalle de temps le plus court est celui pour passer de...

(i) 1 à 2 cellules.

(j) 1 à 4 cellules.

(k) 1000 à 1500 cellules.

(l) 140000000 à 200000000 de cellules.

2.2 Exponentielle népérienne

Nous avons presque trouvé une fonction égale à sa dérivée :

$$(a^x)' = k \cdot a^x$$

Et bien, si $k = 1$, elle est égale à sa dérivée.

Si $k = 1$ alors $(a^x)' = a^x$.

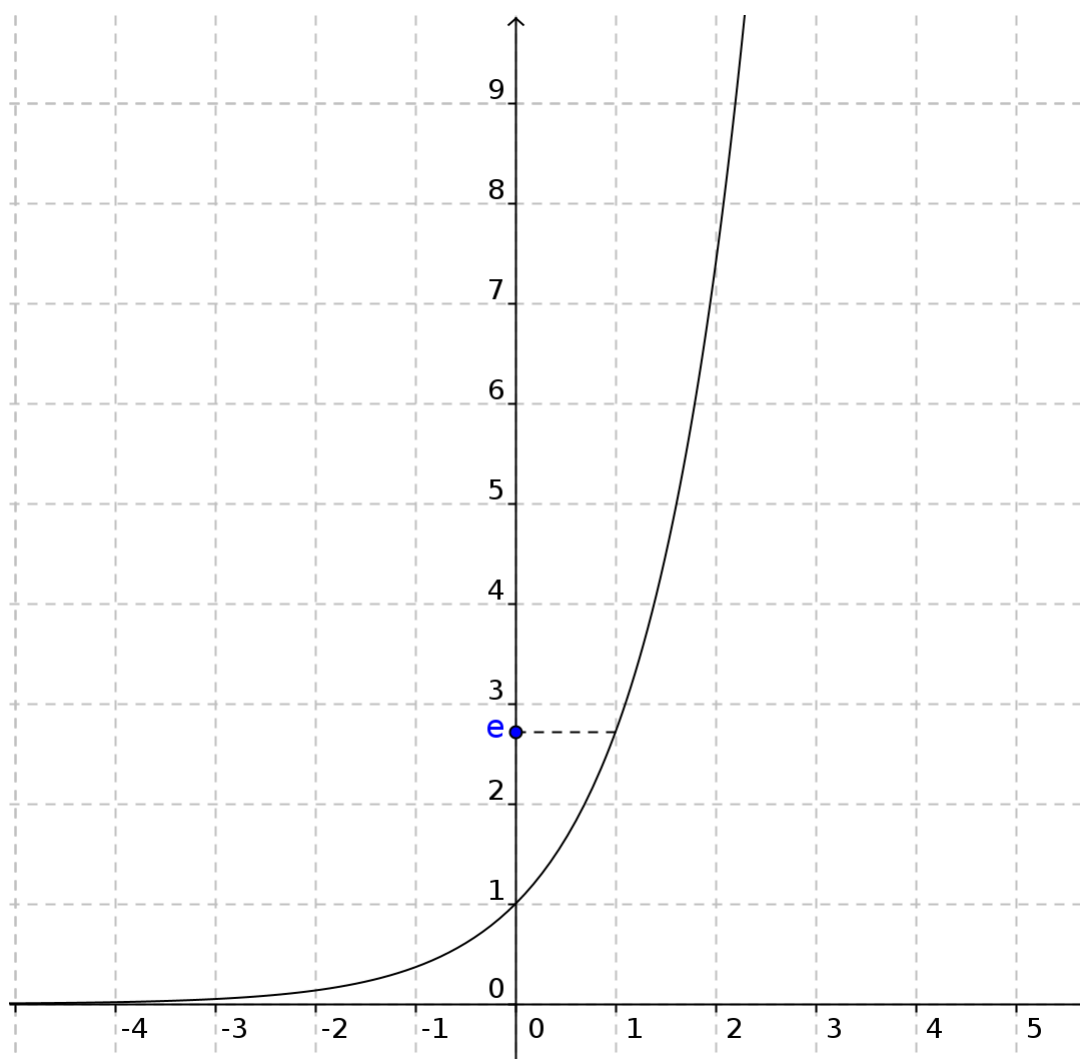
Comme c'est trop long à écrire, on appelle sa base e ,

ce qui donne $(e^x)' = e^x$.

C'est l'exponentielle népérienne.²

$$e \cong 2,718$$

²Leonhard Euler 1707-1783



Exercices

1. Calcule la dérivée de f lorsque :

(a) $f(x) = x + e^x$

(b) $f(x) = x.e^x$

(c) $f(x) = e^{2x}$

(d) $f(x) = e^{2x^2-x-1}$

(e) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(f) $f(x) = \sin x.e^{2x}$

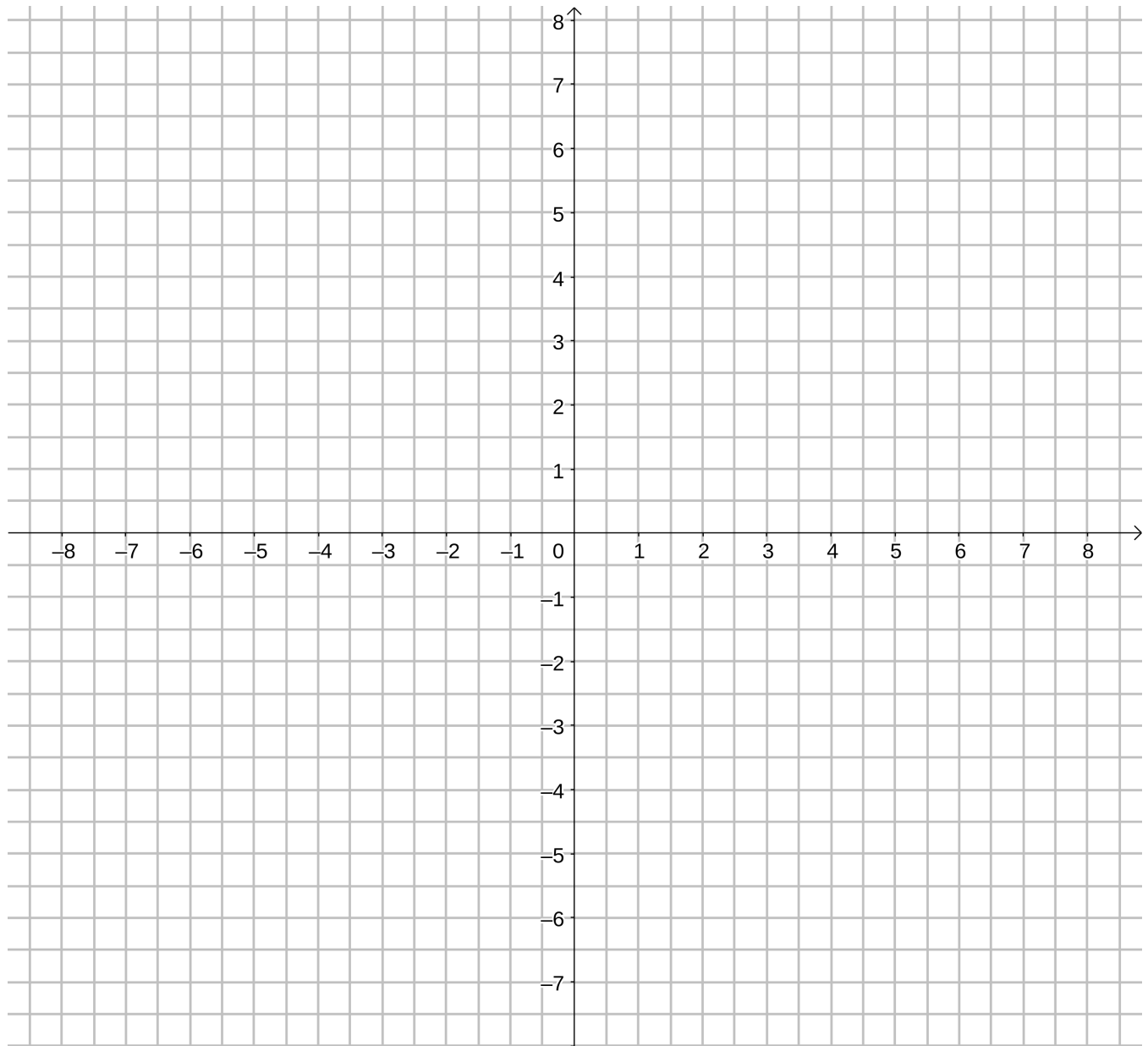
(g) $f(x) = 2.e^{-x^2}$

(h) $f(x) = (2e^{x^2})$

(i) $f(x) = e^{\sin 2x}$

2.3 Logarithmes de base quelconque

Trace le graphique de l'exponentielle de base 2.



Trace sa réciproque sur le même graphique.

Cette réciproque est une fonction car

Elle est appelée “logarithme de base 2”.

Son domaine est R_0^+ car l'ensemble des images de 2^x est R_0^+ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_2 x = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 x = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$$

Logarithme décimal

Lorsque $a = 10$, le logarithme est appelé *logarithme décimal* et noté $\log$.

x	10^x	x	$\log x$
0	1	1	0
1	10	10	1
2	100	100	2
3	1000	1000	3
-1	0,1	0,1	-1
-2	0,01	0,01	-2

Tu trouveras cette fonction sur ta calculatrice.

Exercice

1. a) Écris une relation entre $\log$ et $\exp_{10}$. Précisez bien les domaines.
- b) Donne la valeur de $\log 100000$, $\log \sqrt{10}$, x si $\log x = -3$.
- c) Donne la valeur de $\log_3 81$.
- e) Donne la valeur de $\log_5 \frac{1}{625}$.
- f) Donne la valeur de $\log_{27} 81$.

Formule fondamentale

Reprenons le logarithme en base 10, $\log$.

$$\log 100 = 2$$

$$\log 1000 = 3$$

$$\log 100000 = 5$$

Oui mais, $100000 = 100.1000$.

Et bien, $\log 100000 = \log 100 + \log 1000$!

Généralement :

$$\boxed{\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a (x_1) + \log_a (x_2)}$$

Exemple

Le la_3 a une fréquence de 440 Hz, le la_4 a une fréquence de 880 Hz et le la_5 a une fréquence de 1720 Hz.

$$880 = 2.440$$

Si nous appliquons le logarithme décimal, cela donne :

$$\log(la_4) = \log(2) + \log(la_3).$$

En fait notre oreille perçoit une différence constante entre le la_3 et le la_4 , entre le la_4 et le la_5 , etc.

Logarithme d'une puissance

Simplifions $\log_a x^2$

$$\log_a x^2 = \log_a (x.x) = \log_a x + \log_a x = 2.\log_a x$$

Simplifions $\log_a x^3$

$$\log_a x^3 = \log_a (x.x.x) = \log_a x + \log_a x + \log_a x = 3.\log_a x$$

Généralisation : $\boxed{\log_a x^p = p.\log_a x}$

Exercices

2. Écris les expressions suivantes comme combinaisons linéaires de $\log x$ et $\log y$.

(a) $\log \sqrt[3]{xy}$

(b) $\log x^3 \sqrt{y}$

(c) $\log \frac{y^2}{x^3}$

3. Sachant que $\log 2 = 0,30103$ calcule :

(a) $\log 16$

(b) $\log 0,002$

(c) $\log \sqrt{1024}$

4. Exprime sous forme d'un seul logarithme :

(a) $\log a - \frac{1}{2} \log b + \log c$

(b) $\log 25 - \log 5 - \log 3 - \log 15$

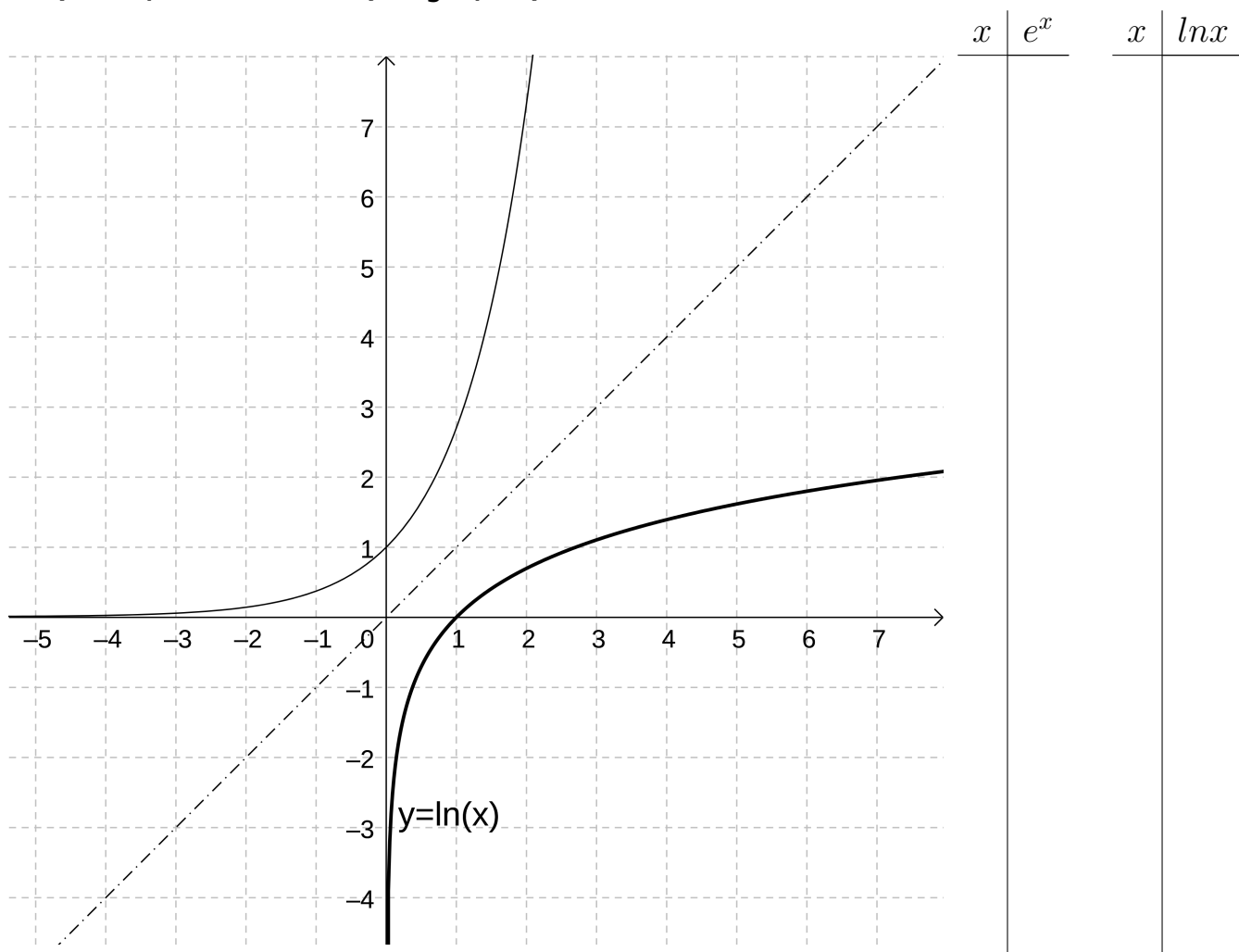
(c) $3\log 2 - 2\log 3 + \log 81$

Dérivée

$$(\log_a x)' = \frac{1}{k \cdot x}$$

2.4 Logarithme népérien

Voici le graphique de l'exponentielle népérienne et celui de sa réciproque. Indique 5 points de chaque graphique.



La réciproque de l'exponentielle népérienne est appelée *logarithme népérien*³.

³John Neper 1550-1617

Dérivée

Vu que $(\log_a x)' = \frac{1}{k.x}$

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Calcul de k

$$k = \ln a$$

Par conséquent,

$$\boxed{(a^x)' = \ln a \cdot a^x} \quad \text{et}$$

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a \cdot x}}$$

En particulier,

$$\boxed{(10^x)' = \ln 10 \cdot 10^x} \quad \text{et}$$

$$\boxed{(\log_{10} x)' = \frac{1}{\ln 10 \cdot x}}$$

Exercices

1. a) Déterminez la pente de la tangente au graphe de $f : x \rightarrow 2^x$ au point $(3; 8)$. Tracez le graphique et la tangente.
 b) Déterminez la pente de la tangente au graphe de $g : x \rightarrow \log_2 x$ au point $(8; 3)$. Tracez le graphique et la tangente.

2. Dérivées

$$(a) \left(3 \ln x - \frac{2}{x} \right)' =$$

$$(b) (\ln^3 x)' =$$

$$(c) (x \cdot \ln x)' =$$

$$(d) \left(\frac{1}{\ln x} \right)' =$$

$$(e) (\ln(1 - 4x^2))' =$$

$$(f) (3^{x^2-2})' =$$

$$(g) (\log_2(3x^2 - \sin x))' =$$

$$(h) (\ln(4x^2 - 2x + 1)^3)' =$$

$$(i) \text{ (Ex 22) } \left(\frac{\ln(x) + 1}{x} \right)' =$$

3. (Ex 23) On considère la fonction f définie pour tout nombre réel non nul x par l'expression

$$f(x) = 2 + (x - 1)e^x + \frac{3}{2} \ln(x^2)$$

Donne une équation de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse $x = 1$.

4. (Ex 24) Étant donné la fonction f définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = \ln(x^2 + 3)$$

on considère la fonction g définie par $g(x) = f(x - 1)$

Sur quelles parties de la droite réelle g est-elle strictement décroissante ?

5. A l'époque de Babylone, un prêteur qui recevait 100 pièces d'or en rendait 125 après 4 ans.

Quel est, dans un système d'intérêts composés annuellement, le taux d'intérêt annuel (TA) ?

2.5 Quelques applications particulières des logarithmes et exponentielles

Le pH

Chimie

Le pH permet de déterminer si une solution est plus ou moins acide. Cette acidité est liée à la concentration en ions H^+ de cette solution (ions H_3O^+ en solution aqueuse). La concentration est le nombre d'ions-gramme par litre de solution, notée $[H^+]$. L'eau pure à 25° C a une concentration en H_3O^+ de 10^{-7} : l'eau a un pH neutre.

Si une solution est plus acide, elle contient plus d'ions H^+ (ex : si une solution aqueuse a une concentration égale à 10^{-5} , elle contient plus d'ions H_3O^+ que l'eau donc cette solution est plus acide que l'eau). La concentration dans les solutions aqueuses varie de 10^{-14} à $10^{0.5}$ (c-à-d de 0,000000000000001 à 3,1).

Depuis plus de 100 ans, la communauté scientifique a adopté la définition du pH suivante :

$$pH = -\log [H^+]$$

Le tableau suivant établit la correspondance :

	Base			→	Acide		
Concentrations $[H^+]$	10^{-14}	10^{-13}	...	10^{-7}	10^{-6}	...	$10^{0,5}$
logarithmes	-14	-13		-7	-6		0,5
pH	14	13		7	6		-0,5

Grâce à ce changement, l'échelle des pH s'étend de 14 à - 0,5 au lieu de 0,000000000000001 à 3,1. Plus la valeur du pH est proche de 14, plus la solution est basique (moins elle est acide) et, plus il est proche de - 0,5, plus la solution est acide.

Dilution d'un médicament homéopathique**Médecine**

La dilution est une étape de la préparation des médicaments homéopathiques. Elle consiste à diluer une teinture-mère, contenant une toxine, dans un solvant (eau ou éthanol) pour aboutir à des dilutions pour lesquelles presque aucune molécule de la toxine n'est présente dans la solution.

La dilution utilisée à l'origine par Samuel Hahnemann s'exprime en CH (centésimale Hahnemaniennne); elle s'effectue en prenant 1 volume de la teinture mère et en complétant avec 99 volumes de solvant. On obtient ainsi une dilution à $1\text{CH} = 1\% = 0,01$. La quantité de toxine est donc simplement divisée par 100.

On répète l'opération en prenant 1 volume de la solution à 1CH et en complétant avec 99 volumes de solvant pour obtenir 2CH. La quantité de toxine initiale est donc divisée par 10 000 en comparaison de celle de la dilution initiale.

On réitère comme cela jusqu'à obtention en CH de la dilution souhaitée.

Si la teinture mère est à l'état pur, sans dilution, et contient 10^{24} molécules actives (environ une mole), les dilutions successives contiennent en molécules actives :

CH	1	2	3	4		10	11	12	>12
Nbre de molécules	10^{22}	10^{20}	10^{18}	10^{16}	...	10000	100	1	0

Exercices

1. En ajoutant une solution basique à du vinaigre, on obtient une concentration en H_3O^+ 5000 fois plus petite que la concentration initiale. Comment cette manipulation agit-elle sur le pH?
2. Pour que le pH d'une solution augmente de 4, comment doit-on agir sur la concentration en H_3O^+ de cette solution?
3. Au départ d'une mole, combien de molécules toxiques contient une dilution 9CH? Et une dilution 5CH?
4. Écrivez les deux formules reliant la dilution CH à la dilution décimale (dilution ordinaire du cours de chimie), notée x.

Chapitre 3

Calcul Intégral

Compétences à atteindre

1. Déterminer une primitive, calculer une intégrale en utilisant les méthodes classiques de substitution et d'intégration par parties.
2. Primitiver et intégrer des fonctions logarithmes ou exponentielles.
3. Appliquer l'intégration pour déterminer l'intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$.

Introduction

Le calcul intégral a pour objectif de calculer
des aires délimitées par des courbes quelconques
des volumes délimités par des surfaces diverses
des travaux de forces provoquant des déplacements quelconques
des probabilités, ...

En un mot : une grandeur varie dans un intervalle, et un nombre intégrant tout lui est associé.

3.1 Prérequis

Dérivée d'une fonction

Exercice

1. Calcule les dérivées suivantes :

(a) $(x^2 + \sqrt{x})' =$

(b) $\left(3x^2 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)' =$

(c) $(\ln(x) + 2^x)' =$

(d) $(\sin(3x))' =$

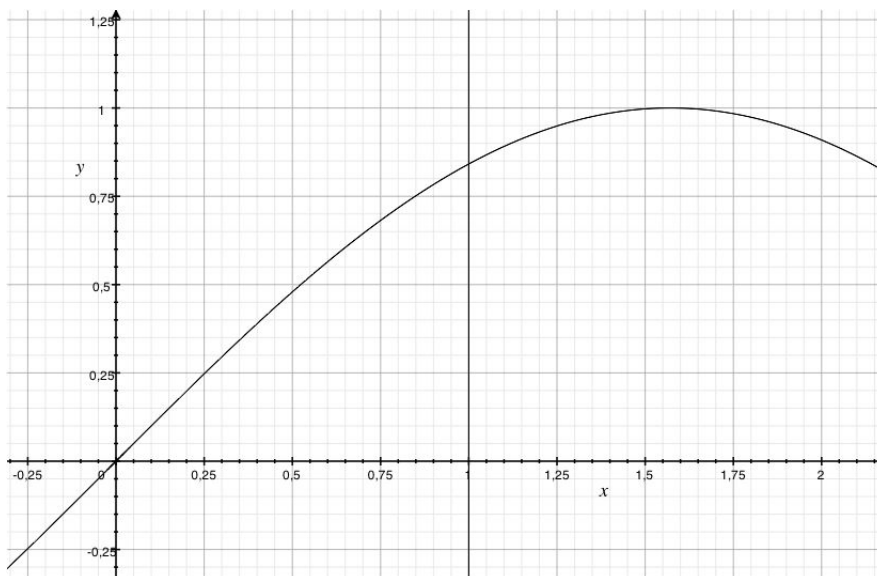
(e) $\left(\frac{1}{4x}\right)' =$

(f) $(\sqrt{x^2 + 1})' =$

(g) $(x^2 - 3x + 7)' =$

3.2 Calcul numérique d'une intégrale

Considérons l'aire délimitée par les axes de coordonnées, la droite d'équation $x = 1$ et la fonction $\sin$.



Hachure cette aire. Nous pouvons obtenir une valeur approchée de cette aire à l'aide de 4 rectangles.

Chacun de ces rectangles a pour base 0,25

et leurs hauteurs respectives sont $\sin(0,25)$, $\sin(0,5)$, $\sin(0,75)$ et $\sin(1)$.

Le calcul demandé est donc

$$A_4 = 0,25.\sin(0,25) + 0,25.\sin(0,5) + 0,25.\sin(0,75) + 0,25.\sin(1).$$

Faisons ce calcul à la calculatrice¹.

Introduis la fonction et fais apparaître le graphique :

mode *Graph*, $Y1 = \sin X$, *Draw*. Si la position du graphe n'est pas intéressante, change les valeurs X_{min} , X_{max} , Y_{min} , Y_{max} dans le menu *V - Window*. Veille à calculer en radians (*Setup*).

Passons au calcul. Tu peux obtenir $\sin(0,25)$, $\sin(0,5)$, ..., $\sin(1)$ au sein d'une table : mode *Table*, $Y1 = \sin x$ (inchangé). Ensuite, dans le menu *Rang* ou *Set*,

précise la première valeur de x , *Start* : 0.25,

la dernière *End* : 1

et le pas *Pitch* : 0.25 ou *Step* : 0.25.

Tu obtiens les réponses avec *Tabl*, sous forme d'une table à 2 colonnes. Tu peux recopier cette table ; vérifie la concordance avec le graphique.

Il reste à faire la somme des valeurs de la deuxième colonne et à multiplier par 0,25.

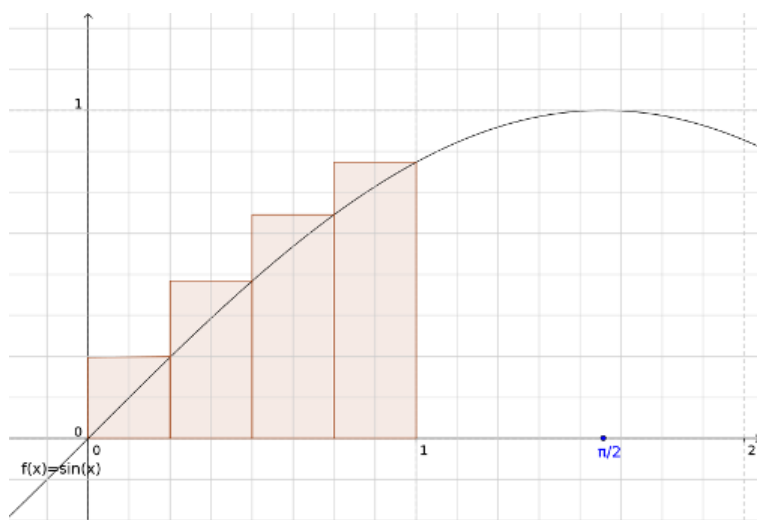
Recopie d'abord, dans la calculatrice, cette colonne sous forme de liste. Sélectionnez une valeur quelconque dans cette colonne, puis *OPTN*, menu *List* puis *L1* et enfin *List1*.

Additionnez les éléments de la liste. Mode *RUN*, *OPTN* et dans les menus *List*, *Sum* (au fond à droite), *List* (retour à gauche) 1 et enfin *EXE*.

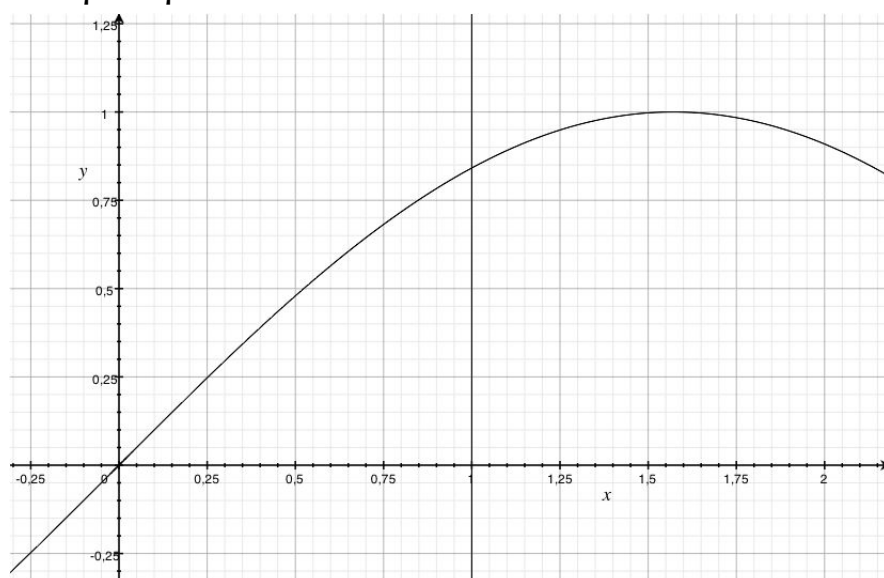
Pour obtenir l'aire totale des rectangles multiplions par leur base : 0,25.

La réponse est $A_4 = 0,56$ environ, ce qui signifie que l'aire totale des 4 rectangles est 0,56. Une chose est certaine : cette valeur est plus grande que l'aire souhaitée (hachurée).

¹Testé sur Casio Graph25. Casio est une marque déposée de Casio Computer Co.



Pour améliorer ce résultat, nous pouvons utiliser 8 rectangles de bases deux fois plus petites.



Passons au calcul. Tu peux obtenir $\sin(0,125)$, $\sin(0,25)$, ..., $\sin(1)$ au sein d'une table : mode *Table*, $Y1 = \sin x$ (inchangé). Ensuite, dans le menu *Rang* ou *Set*,

précise la première valeur de x , *Start* : 0.125,

la dernière *End* : 1 (inchangée)

et le pas *Pitch* : 0.125 ou *Step* : 0.125.

Tu obtiens les réponses avec *Tabl*, sous forme d'une table à 2 colonnes. Tu peux recopier cette table dans ton cours.

Il reste à faire la somme des valeurs de la deuxième colonne et à multiplier par 0,125.

Recopie d'abord cette colonne dans une liste. Sélectionne une valeur quelconque dans cette colonne, puis *OPTN*, menu *List* puis *L1* et enfin *List2*. Additionne les éléments de la liste. Mode *RUN*, *OPTN* et dans les menus *List*, *Sum* (au fond à droite), *List* (retour à gauche) 2 et enfin *EXE*.

Pour obtenir l'aire totale des rectangles multiplions par leur base : 0,125.

La réponse est $A_8 = 0,51$ environ, ce qui signifie que l'aire totale des 8 rectangles est 0,51. C'est déjà meilleur.

En fait, en augmentant de cette manière le nombre de rectangles, l'aire obtenue est de plus en plus proche de l'aire cherchée, et même aussi proche qu'on veut de cette aire hachurée :

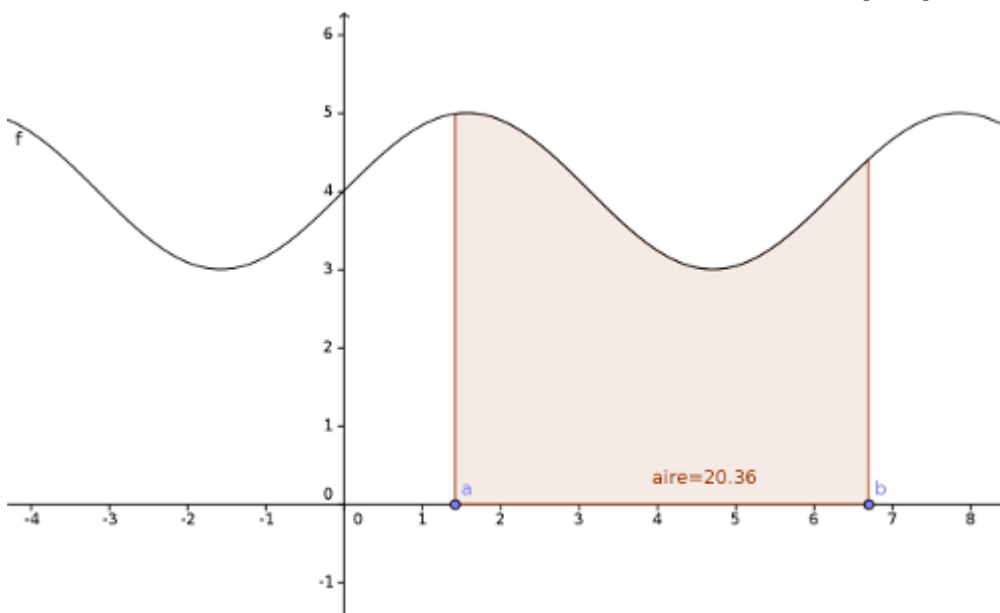
$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$$

Vérifie qu'avec $n = 100$, tu obtiens 0,46. Les valeurs se rapprochent ensuite de 0,4597.

3.3 Intégrale d'une fonction continue dans [a ; b]

Théorème

Considérons f , fonction continue et positive dans $[a ; b]$.



L'aire délimitée par l'axe X, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et le graphe de la fonction f peut être obtenue par $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$.

Ce nombre est noté $\int_a^b f(x) dx$

(intégrale de a à b de f)

Ce résultat est admis.

3.4 Primitive d'une fonction

Définition

Une primitive de la fonction f est une fonction F dont la dérivée est f .

Exemples

1. $(x^2 - 3x + 2)' = 2x - 3$, donc $x^2 - 3x + 2$ est une primitive de $2x - 3$.
2. $(\sin x)' = \cos x$, donc $\sin x$ est une primitive de $\cos x$.
3. Vérifie que $x \cdot \ln x$ est une primitive de $\ln x + 1$.

Propriété

En ajoutant une constante à une primitive, on obtient une autre primitive.

Exemples

1. $x^2 - 3x + 19$ est aussi une primitive de $2x - 3$.
2. $\sin x + 18$ est aussi une primitive de $\cos x$.

Mais bon sang, qu'est-ce que cela a à voir avec les intégrales ?

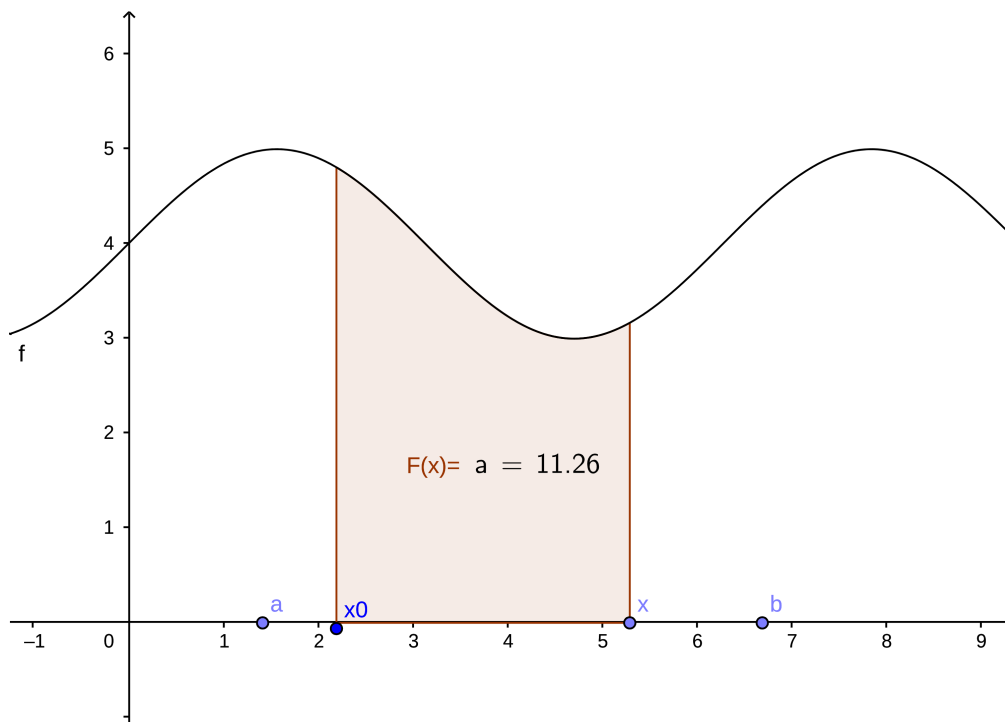
Théorème d'existence d'une primitive

Si f est une fonction continue sur $]a; b[$, alors

pour x_0 fixé dans $]a; b[$,

une primitive de f est donnée par $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$

Ce théorème, illustré ci-dessous, est admis.



Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive ou formule de Leibniz-Newton

Si F est une primitive de f (continue sur $[a; b]$),

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Remarque

Ce résultat nous permet de calculer des intégrales à l'aide de primitives, au lieu du calcul numérique (rectangles). Nous allons donc nous exercer à calculer des primitives.

Notation

Vu son lien avec les intégrales, toute primitive de f sera notée $\int f(x) dx$.

3.5 Primitives immédiates

Tu connais déjà des primitives : il suffit de lire les formules de dérivation à l'envers.

Fonctions de référence

Dérivée	Primitive
$(k)' = 0$	$\int 0 \, dx = k$
$(x)' = 1$	$\int 1 \, dx = x + k$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$\int x^p \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + k$ si $p \neq -1$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} + k$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2\sqrt{x} + k$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x \, dx = \sin x + k$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + k$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + k$
$(e^x)' = e^x$	$\int e^x \, dx = e^x + k$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + k$

Lorsque tu cherches une primitive d'une somme, il suffit de chercher une primitive de chaque terme et d'additionner, car $(f + g)' = f' + g'$.

Idem pour un multiple, car $(k \cdot f)' = k \cdot f'$.

Exercices

1. Calcule

$$\begin{array}{lll}
 1) \int x^{16} dx & 4) \int 2x^3 - 7x + 4 dx & 7) \int \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\cos^2 x} dx \\
 2) \int 8 dx & 5) \int \cos x + \sin x dx & 8) \int \frac{2}{3x^2} - 4\sqrt[5]{x^3} dx \\
 3) \int \frac{3}{x^3} dx & 6) \int \frac{8}{3x} dx & 9) \int 4^x + e^x dx
 \end{array}$$

2. Calcule

$$\begin{array}{llll}
 1) \int \frac{1}{x^2} dx & 4) \int 5 \cos x dx & 7) \int 2x^3 - 7x^2 + 5 dx & 10) \int \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{x} dx \\
 2) \int \sqrt{x} dx & 5) \int 3.8^x dx & 8) \int (2x - 3)(3 - x) dx & \\
 3) \int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} dx & 6) \int -12 dx & 9) \int \frac{x^2 + 1}{x^2} dx &
 \end{array}$$

3. (Ex 25) On considère la fonction f définie pour tout nombre réel $x \neq 0$ vérifiant :

$$f(1) = 1$$

et dont la dérivée vaut :

$$f'(x) = x^3 - \frac{3}{x^4}$$

Que vaut $f(2)$?

Exemples d'utilisation

4. Pour calculer $\int_{-1}^3 x^4 + 5 dx$, il suffit de remarquer que $\int x^4 + 5 dx = \frac{x^5}{5} + 5x$

et de calculer $\left[\frac{x^5}{5} + 5x \right]_{x=3} - \left[\frac{x^5}{5} + 5x \right]_{x=-1}$.

Termine le calcul.

5. Calcule $\int_0^1 \sin x dx$ à l'aide d'une primitive.

6. Calcule $\int_0^4 E(x) dx$.

3.6 Primitivation par substitution

Dérivation des fonctions composées (rappel)

$$1. (\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot (2x)' = 2\cos(2x)$$

$$2. (\sqrt{x^2 - 5x + 6})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 5x + 6}} \cdot (x^2 - 5x + 6)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 5x + 6}} \cdot (2x - 5)$$

Primitivation par substitution

Pour calculer $\int \cos 2x \, dx$,

posons $t = 2x$ et dérivons $2x$ en notant

$$dt = (2x)' \, dx, \text{ c'est-à-dire}$$

$$dt = 2 \, dx \text{ ou encore}$$

$$\frac{1}{2} dt = dx$$

$$\begin{aligned} \text{En remplaçant dans la primitive, } \int \cos 2x \, dx &= \int \cos t \, \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos t \, dt \\ &= \frac{1}{2} \sin t = \frac{1}{2} \sin 2x \end{aligned}$$

Tu as ainsi utilisé le théorème de dérivation des fonctions composées à l'envers, ce que tu vérifieras en dérivant le résultat.

Exercices

Calcule

- | | | |
|--|---|--|
| 1) $\int 3x^2 (x^3 - 1)^7 dx$ | 7) $\int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 4} dx$ | 13) $\int \frac{x + 3}{\sqrt[3]{x^2 + 6x}} dx$ |
| 2) $\int \frac{3x^2}{(x^3 - 1)^3} dx$ | 8) $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 3x + 4}} dx$ | 14) $\int \frac{2}{\cos^2 4x} dx$ |
| 3) $\int 10x \cos(5x^2) dx$ | 9) $\int e^{5x} dx$ | 15) $\int \sin 4x dx$ |
| 4) $\int \frac{2x}{\cos^2(x^2 - 1)} dx$ | 10) $\int (x - 1)(2x^2 - 4x - 3)^2 dx$ | 16) $\int e^{4x-3} dx$ |
| 5) $\int 4e^{4x-3} dx$ | 11) $\int \frac{x}{(3x^2 + 4)^2} dx$ | 17) $\int \frac{1}{1 - x} dx$ |
| 6) $\int \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 3} dx$ | 12) $\int x^2 \sqrt{x^3 + 5} dx$ | 18) $\int \frac{1}{e^x} + 9 dx$ |

3.7 Primitivation par parties**Formule**

$$\boxed{\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g}$$

ExempleCalcule $\int x \cdot \sin x dx$

La difficulté provient du fait que le produit de x par $\sin x$ est ineffectuable. Cela signifie que les deux symboles x ne peuvent être combinés car le deuxième est la proie de $\sin$.

En revanche il s'agit du produit de fonctions dérivables/primitivables. C'est le terrain de jeu de la primitivation par parties.

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = -\cos x \end{cases}$$

$$\int x \cdot \sin x dx = -x \cdot \cos x - \int -\cos x dx = -x \cdot \cos x + \sin x$$

Remarques

1. La formule de primitivation par partie ne fournit pas la réponse; elle remplace juste la primitive de l'énoncé par une autre.
2. Le choix $\begin{cases} f(x) = \sin x \\ g'(x) = x \end{cases}$ conduit à une primitive plus compliquée que l'énoncé.
3. Le passage de $g'(x)$ à $g(x)$ est à l'origine de l'expression "primitivation par parties".

Exercice

Calcule

- | | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\int x \cdot \cos x \, dx$ | 4) $\int x^2 \cdot e^x \, dx$ | 7) $\int 2x^2 \cdot \cos 3x \, dx$ | 10*) $\int \ln x \, dx$ |
| 2) $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$ | 5) $\int x \cdot \ln x \, dx$ | 8) $\int (2x - 3) \cdot \ln x \, dx$ | 11*) $\int 16x^3 \cdot \ln x \, dx$ |
| 3) $\int x^2 \cdot \ln x \, dx$ | 6) $\int x \cdot \sin(3x) \, dx$ | 9) $\int x \cdot (x^3 + 1) \, dx$ | |

3.8 Exercice récapitulatif

1. Calcule

- | | | |
|--|--------------------------------------|--|
| 1) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} \, dx$ | 5) $\int \frac{5}{6-x} \, dx$ | 9) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+3} \, dx$ |
| 2) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$ | 6) $\int \sin 3x \, dx$ | 10) $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ |
| 3) $\int \frac{7}{5\sqrt{x}} - 4^{2x-3} \, dx$ | 7) $\int (6x-5) e^{3x^2-5x+2} \, dx$ | 11) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} \, dx$ |
| 4) $\int x^2 \cos x \, dx$ | 8) $\int (x^2 - 2x) \ln x \, dx$ | 12) $\int \frac{e^x}{e^x + 2} \, dx$ |

2. (Ex 24) Que vaut $\int e^{-2 \ln(x)} \ln(x) \, dx$ à une constante additive près ?

3.9 Calcul d'intégrales à l'aide de primitives

Formule de Leibniz-Newton (rappel)

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f (fonction continue...).

Exercices

1. Calcule

- | | | |
|----------------------------------|--|---|
| 1) $\int_{-1}^1 2x^3 - x + 1 dx$ | 4) $\int_2^4 x\sqrt{x^2 + 4} dx$ | 7) $\int_{-2}^{-1} \frac{x-2}{x^2 - 4x + 3} dx$ |
| 2) $\int_0^1 (1-x)^2 dx$ | 5) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cdot \cos x dx$ | 8) $\int_{-2}^{-1} \frac{x-2}{(x^2 - 4x + 3)^2} dx$ |
| 3) $\int_0^1 e^{2x} dx$ | 6) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$ | 9) $\int_0^3 \frac{2x}{\sqrt[3]{7x^2 + 1}} dx$ |

Chapitre 4

Géométrie et Algèbre

Curieux mélange

Il peut paraître étonnant de mélanger l'algèbre et la géométrie.

Dans les images de synthèse les points se déplacent par calcul (ordinateur). La géométrie analytique nous permet de résoudre des problèmes géométriques par calcul.

Compétences à atteindre

1. Interpréter géométriquement les solutions d'un système d'équations à trois inconnues.
2. Établir l'orthogonalité (perpendicularité) ou le parallélisme de deux vecteurs.
3. Utiliser les principes d'équivalence pour résoudre des systèmes d'équations linéaires.

4.0 Prérequis

Résous le système d'équations $\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$.

Le but est que ces deux équations soient simultanément vraies.

La première est vraie si $x = -2$ et $y = 0$, ce qui se note $(-2; 0)$,

Mais la seconde est fausse $(-2 = 5)!$

La seconde est vraie si $x = 5$ et $y = 0$, ce qui se note $(5; 0)$,

Mais la première est fausse $(10 = -4)!$

Pour ne pas perdre notre temps,

nous allons utiliser la méthode des combinaisons.

Il s'agit de remplacer la première équation, trop compliquée,

par une somme de multiples des deux équations.

Tu peux utiliser n'importe quels multiples, mais l'intérêt est d'obtenir une équation simple, par exemple sans x .

Si la première équation reste inchangée ($\times 1$)

et la seconde multipliée par -2 en les additionnant les x disparaissent !

$$\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \quad \begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array} \quad \begin{cases} (2x - 2x) \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

Il faut faire la même chose avec les y :

$$\begin{cases} (3y + 4y) \\ x - 2y = 5 \end{cases} \quad \text{et avec les termes indépendants :} \quad \begin{cases} 7y = (-4 - 10) \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \\ x - 2y = 5 \end{cases} \quad \text{et il reste à remplacer dans la seconde équation :} \quad \begin{cases} y = -2 \\ x - 2 \cdot (-2) = 5 \end{cases}$$

Nous obtenons la solution $(1; -2)$.

Tu peux la vérifier.

Résous le système d'équations $\begin{cases} y = 2x + 7 \\ y = -x + 1 \end{cases}$.

La méthode des combinaisons fonctionne. En voici une autre :

$$\begin{cases} -x + 1 = 2x + 7 \\ y = -x + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x = 6 \\ y = -x + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 + 1 \end{cases}$$

Nous obtenons la solution $(-2; 3)$.

Tu peux la vérifier.

Exercices

1. Résous les systèmes suivants par la méthode de ton choix.

$$(a) \begin{cases} y = 3x + 5 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} y - 3x = -5 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 3x + y = -5 \\ y = -3x + 3 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 4x - 2y = -3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

2. La translation $\overrightarrow{QP}$ est la translation qui applique le point Q sur le point P .

Construis les figures demandées.

(a) Le segment $[QP]$ et son image par la translation $\overrightarrow{u}$.

(b) Le segment $[QR]$ et son image par la translation $\overrightarrow{QP}$.

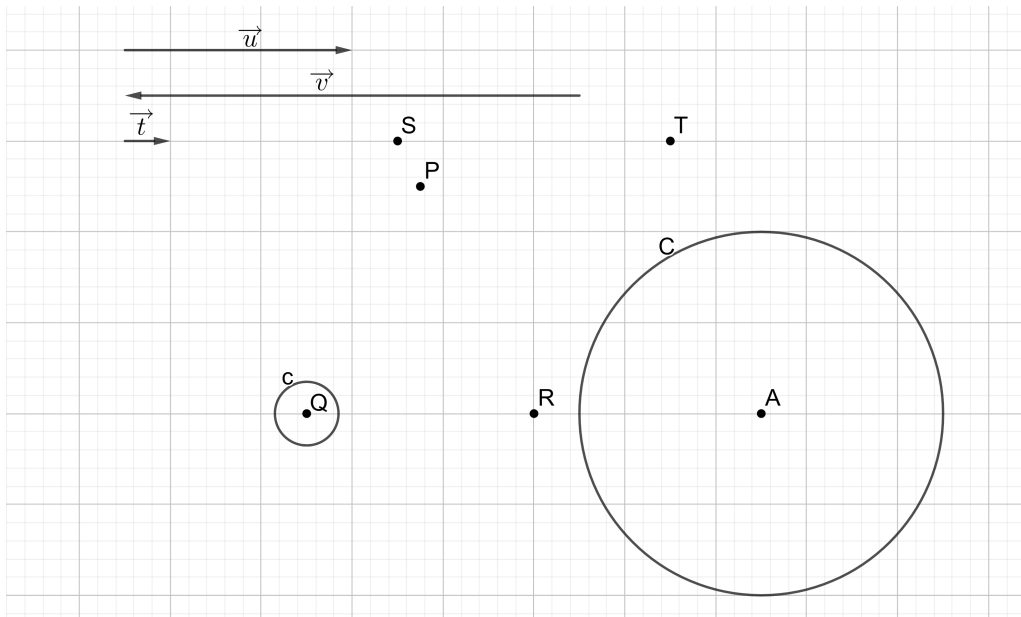
(c) L'image du cercle C par la translation $\overrightarrow{v}$.

(d) L'image du point S par la translation $\overrightarrow{t}$.

(e) L'image du point T par la translation $-\overrightarrow{t}$.

(f) L'image du cercle c par la translation $\overrightarrow{u}$.

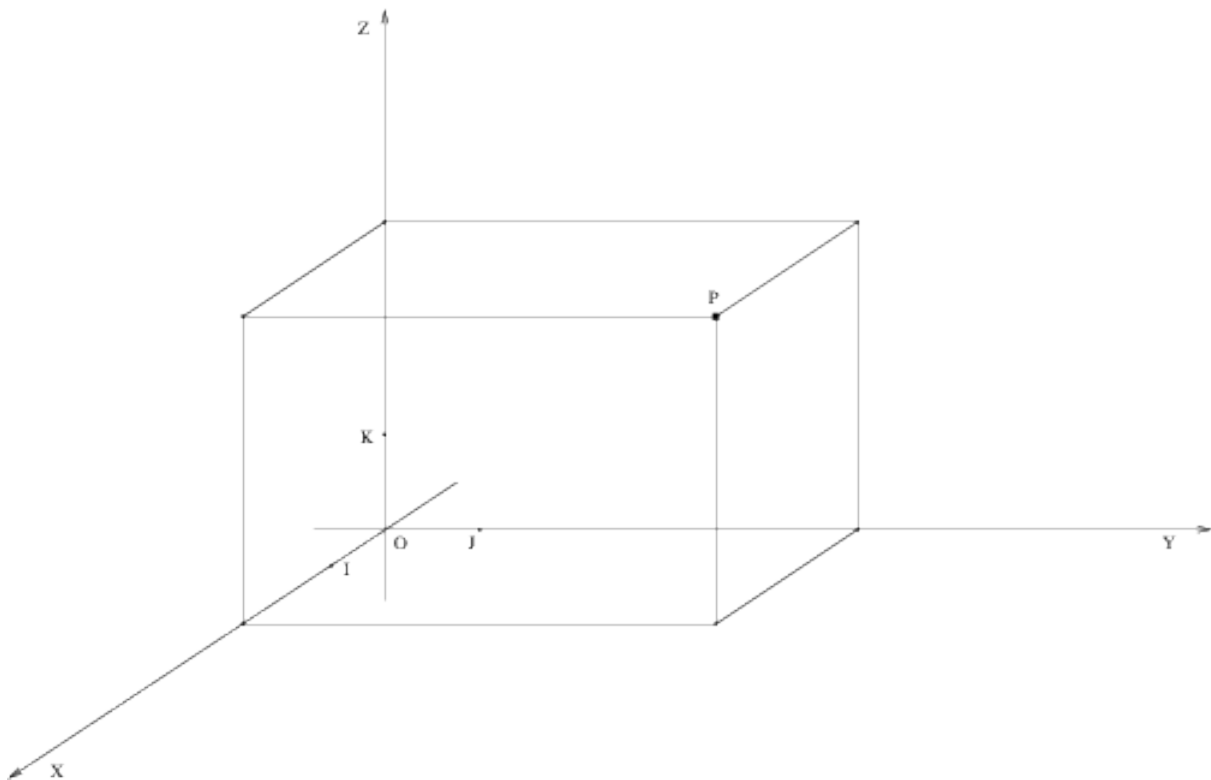
(g) Trace les segments $[PS]$, $[SS']$, $[P'T]$ et $[TT']$.



4.1 Points et vecteurs

4.1.1 Point de l'espace

Dans l'espace rapporté à un repère, tout point P est représenté par ses 3 coordonnées.

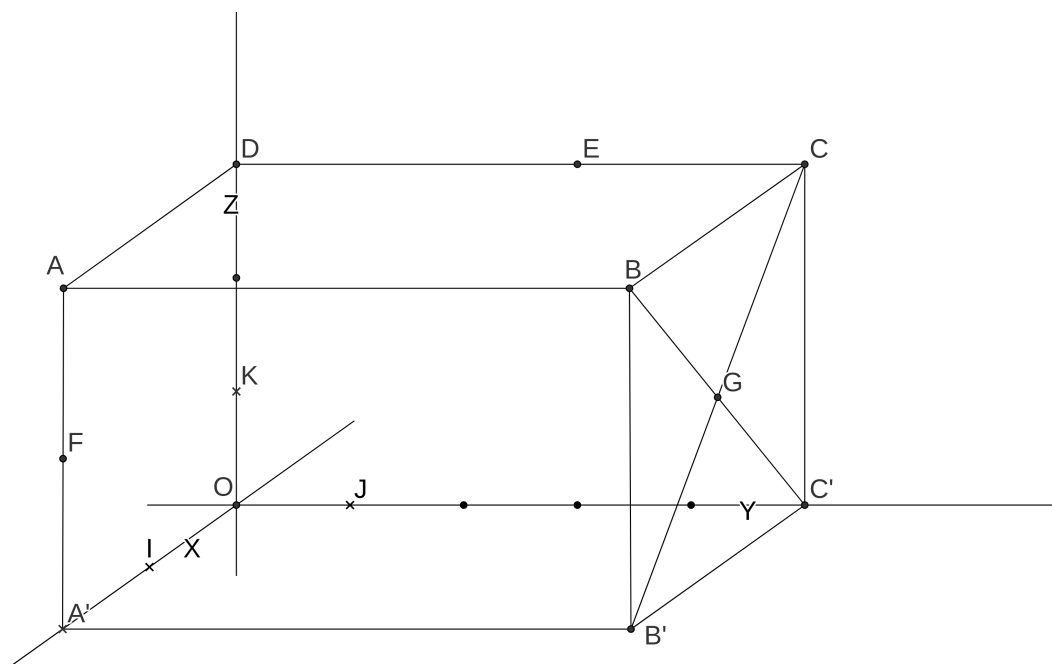


Dans tout ce qui suit, le repère sera orthonormé, c'est-à-dire que ses axes seront perpendiculaires et porteront la même unité.

Chaque coordonnée s'obtient alors à l'aide d'un plan perpendiculaire à l'axe concerné.

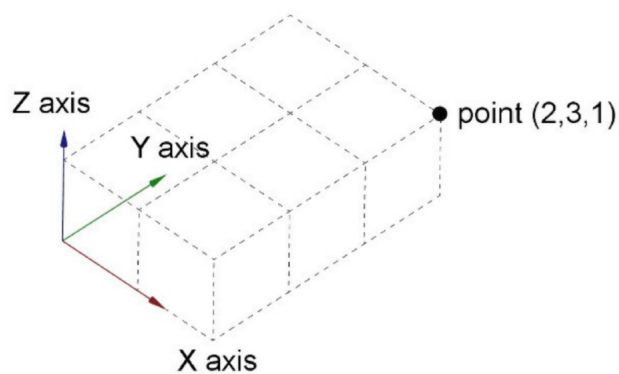
Exercice

1. Dans le repère $(O; I, J, K)$, détermine les coordonnées des points D, E, F, G.



Remarque

Le repère est de plus en plus souvent dessiné ainsi :



4.1.2 Distance entre deux points

Si le repère est orthonormé, la distance entre A et B est donnée par

$$|AB| = d(A; B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Norme d'un vecteur

La distance entre les points A et B est aussi la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, qui se note $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Exercice

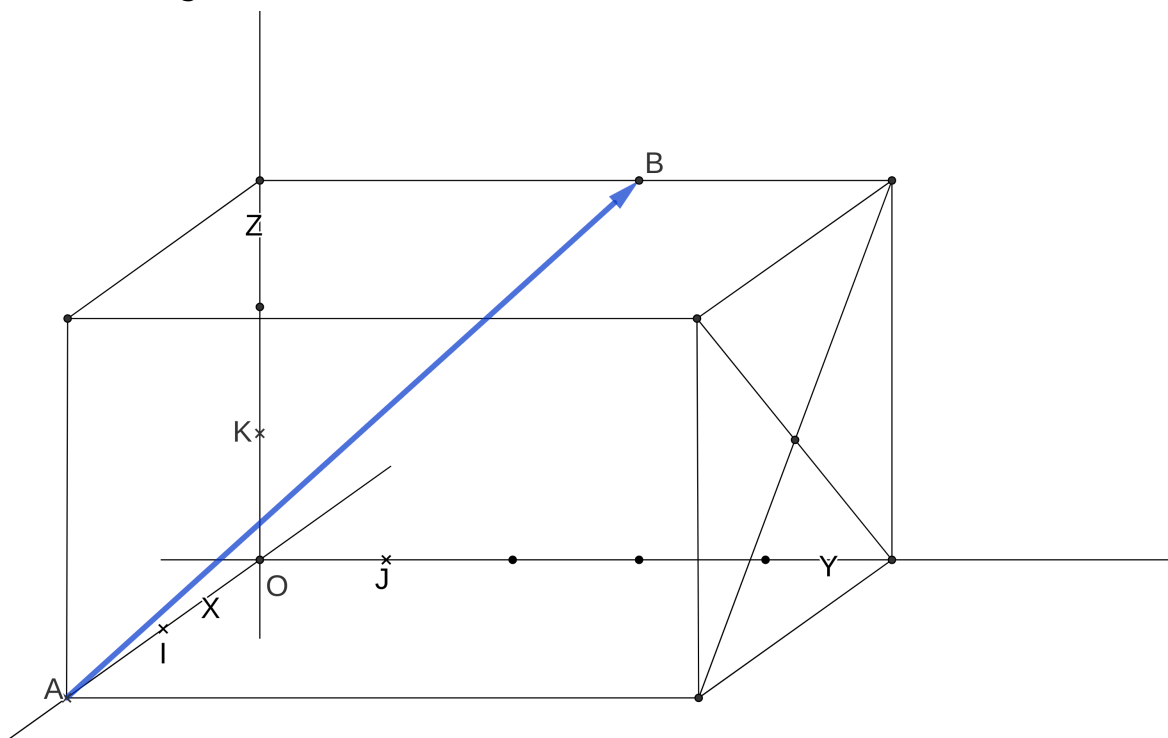
2. Détermine la longueur des côtés du triangle ABC' (figure précédente).

4.1.3 Vecteur de l'espace

Un vecteur est formé de deux points et un ordre.

Ainsi, les points A et B définissent les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$.

A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$; B en est l'extrémité.



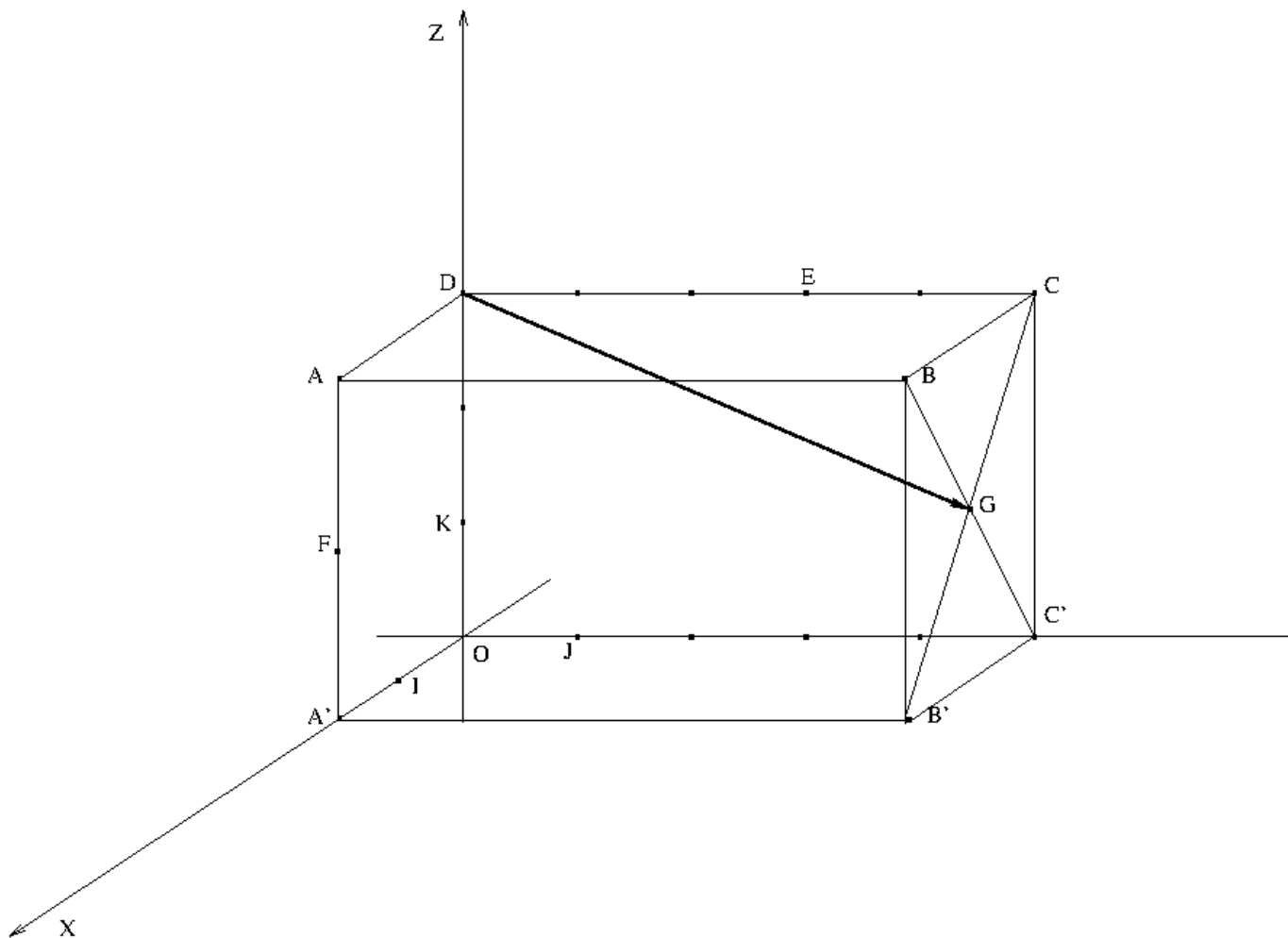


La notion de **vecteur** est identique à la notion de **translation** ou de **déplacement** de A en B .
 Tout ce qui se trouve entre A et B n'a aucune importance.
 Seuls comptent A (l'origine) et B (l'extrémité).

Si, dans un repère de l'espace, les coordonnées du point A sont (x_A, y_A, z_A) et les coordonnées du point B sont (x_B, y_B, z_B) alors les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.
 Ce sont les nombres à ajouter aux coordonnées de A pour obtenir celles de B .

Exercice

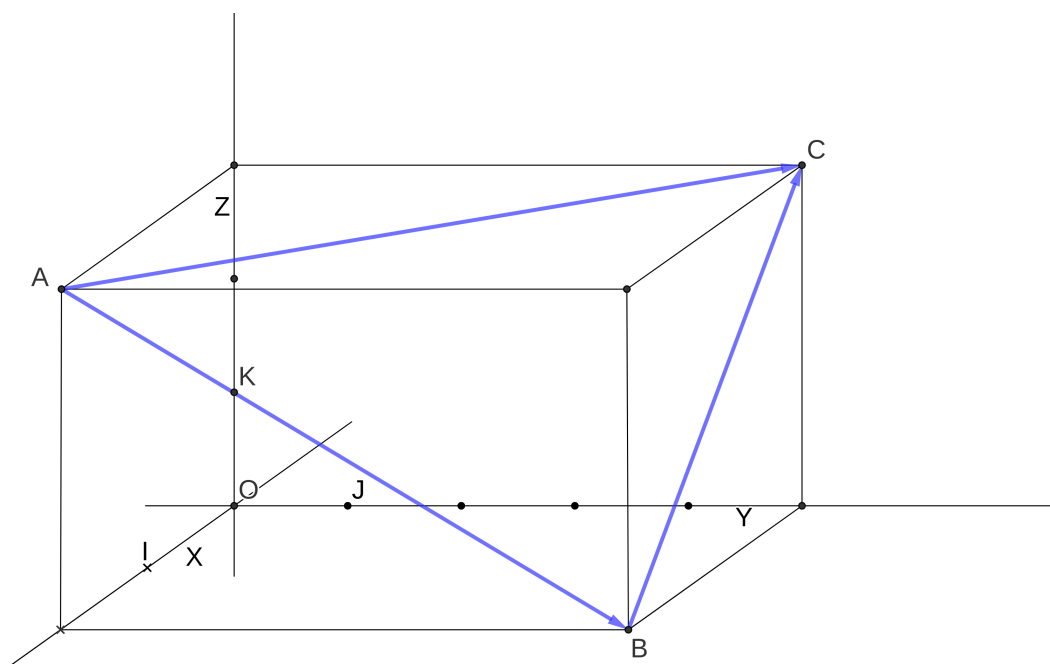
3. Dans la figure ci-dessous,
 détermine les composantes des vecteurs $\overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{EF}$.



Le vecteur est un objet à la fois de l'algèbre et de la géométrie.



Relation de Châles¹



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Cette relation exprime que le déplacement de A à B suivi du déplacement de B à C donne le déplacement de A à C .

Cette relation est un mélange subtil d'algèbre (+ =) et de géométrie (A B C).

¹Michel Chasles (1793-1880), mathématicien français

Seul le vecteur permet de faire cela.

On n'additionne pas des droites et on ne fait pas d'intersection de nombres !

Composantes

Cette relation fonctionne aussi sur les composantes des vecteurs.

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AC}$$

Généralisation

Toute opération sur les vecteurs

donne la même opération sur les composantes.

Les vecteurs ont été inventés pour ça !

Multiplication d'un vecteur par un nombre

Dans un repère, si $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$

alors les composantes de $k \cdot \vec{v}$ sont $(k.v_1; k.v_2; k.v_3)$.

Géométriquement

Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul et k un réel non nul.

$k \vec{v}$ est un vecteur :

- de même direction que $\vec{v}$
- de même sens que $\vec{v}$ si $k > 0$ et de sens contraire à $\vec{v}$ si $k < 0$
- de norme égale à $|k| \cdot \|\vec{v}\|$.

Si le vecteur $\vec{v}$ est nul ou si le réel k est nul, le vecteur $k \vec{v}$ est nul.

Vecteurs parallèles

Deux vecteurs sont parallèles ssi l'un d'eux est multiple de l'autre.

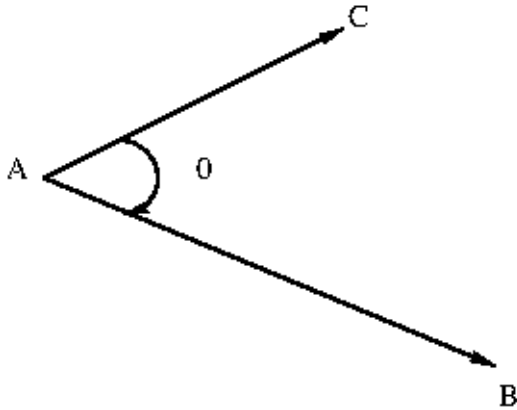
Trois points A, B, C sont alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ est un multiple de $\overrightarrow{AC}$

c'est-à-dire ssi $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$

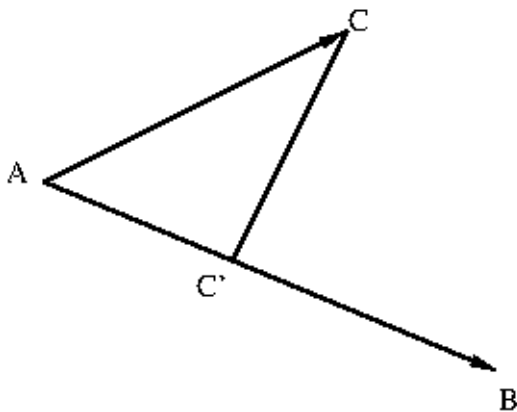
4.1.4 Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre qui peut se calculer de 3 manières.

$$1) \vec{AB} \bullet \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \cos\theta$$



$$2) \vec{AB} \bullet \vec{AC} = \vec{AB} \bullet p_{AB}(\vec{AC}) = \vec{AB} \bullet \vec{AC'}$$



$$3) \vec{AB} \bullet \vec{AC} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v$$

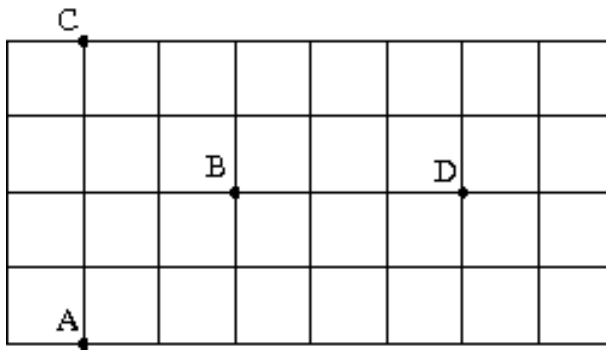
où $(x_u; y_u; z_u)$ et $(x_v; y_v; z_v)$ sont les composantes des vecteurs dans un repère orthonormé de l'espace.

La deuxième manière de calculer peut s'exprimer ainsi :

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de l'un par la projection orthogonale de l'autre sur lui.

Exercices

4. L'unité étant la longueur du côté d'un carré, calcule



(a) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BD}$

(b) $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BD}$

(c) $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BA}$.

5. Sachant que $\vec{t} (3; -2; \frac{1}{2})$ $\vec{u} (\frac{5}{2}; 3; -1)$ $A(-1; 2; 3)$ $B(-1; -\frac{1}{2}; 0)$, calcule

(a) $\vec{t} \cdot \vec{u}$

(b) $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$

6. Calcule $\vec{t} \cdot \vec{v}$ sachant que

(a) $\vec{t} (2; 3; -1)$ $\vec{v} (-2; 3; \frac{5}{2})$

(b) $\|\vec{t}\| = 3$ $\|\vec{v}\| = 5$ $\vartheta = 45^\circ$

(c) $\|\vec{t}\| = 3$ $\|\vec{v}\| = 4$ $\vartheta = 150^\circ$.

7. (Ex 21) Dans un repère orthonormé du plan, $A(0; 3)$ $B(3; 6)$ et $C(4; 4)$. Que vaut $\cos \widehat{ABC}$?

8. (Ex 25) Dans le plan euclidien, on considère quatre points P, Q, R, S qui forment un carré PQRS de côtés de longueur 2. Que vaut le produit scalaire $\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{RP}$?

4.1.5 Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul.

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD} = 0$$

Concrètement, deux vecteurs sont orthogonaux ssi leurs directions sont perpendiculaires.

Exercice

9. Calcule les angles du triangle ABC' du parallélépipède rectangle du début de la section.

4.1.6 Exercices**Combinaison linéaire**

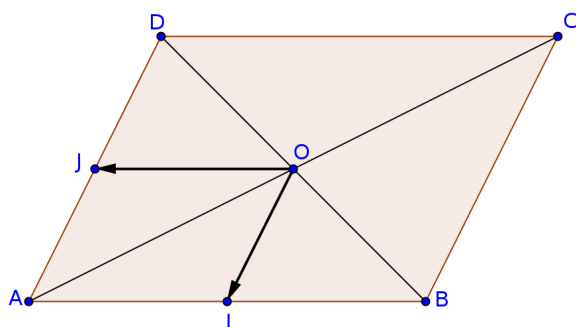
Une combinaison linéaire de vecteurs est une somme de multiples de ces vecteurs.

10. Soit le vecteur $\overrightarrow{OA}(2;-1;3)$. Calcule les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ tels que

(a) $2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 4\overrightarrow{OA}$

(b) $2\overrightarrow{OC} - \frac{4\overrightarrow{OA}}{5} = \frac{5\overrightarrow{OC}}{7} - 2\overrightarrow{OA}.$

11. Dans le parallélogramme $ABCD$, exprime les vecteurs suivants comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.



(a) $\overrightarrow{IA}$

(b) $\overrightarrow{AB}$

(c) $\overrightarrow{AJ}$

(d) $\overrightarrow{BC}$

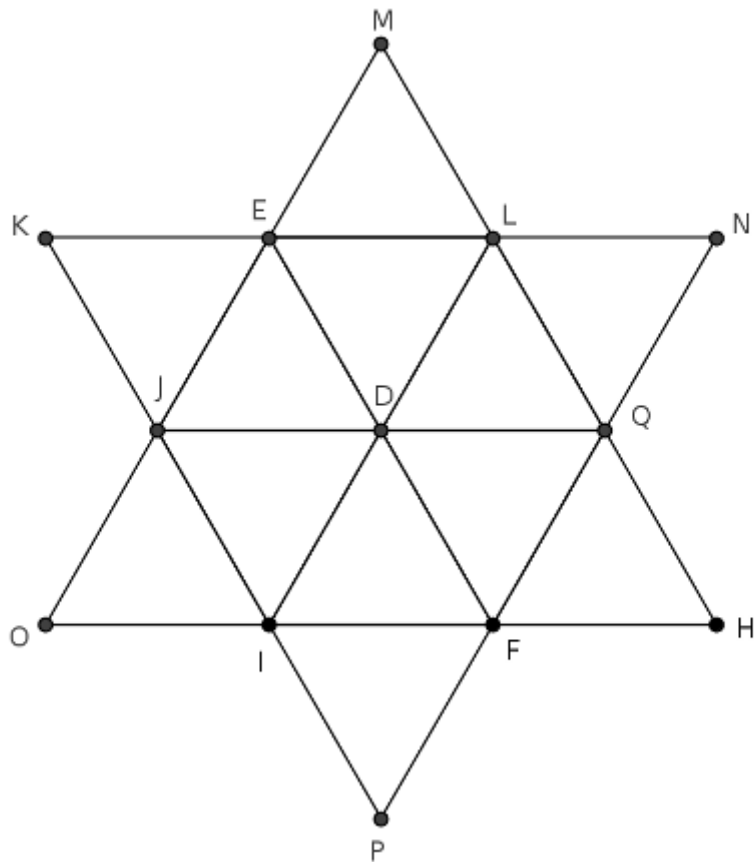
(e) $\overrightarrow{OA}$

(f) $\overrightarrow{AC}$

(g) $\overrightarrow{DO}$

(h) $\overrightarrow{BD}$

12. Exprime les vecteurs suivants comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.



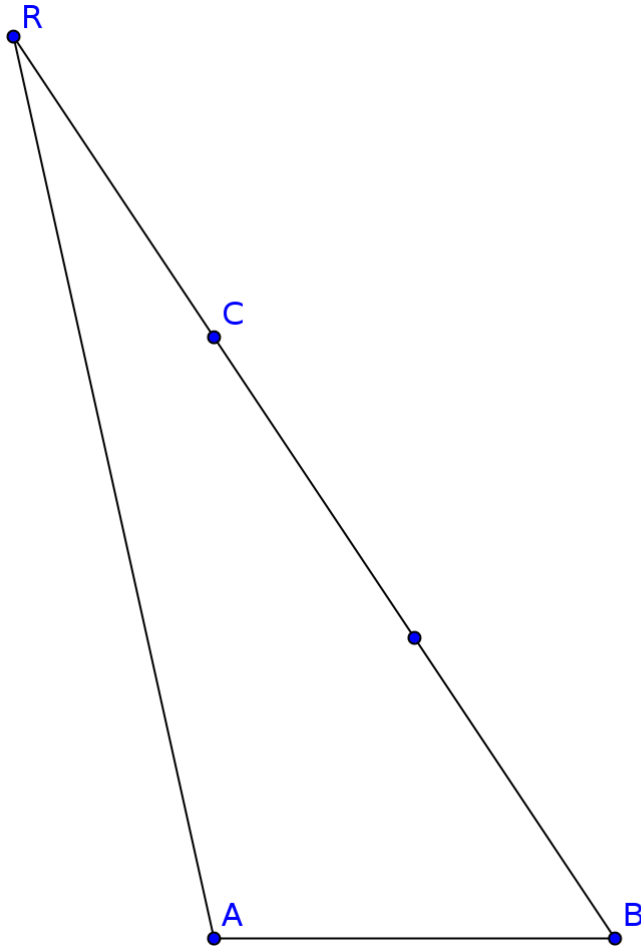
(a) $\overrightarrow{OL}$

(b) $\overrightarrow{OP}$

(c) $\overrightarrow{EH}$

(d) $\overrightarrow{JN}$

13. Sachant que $\overrightarrow{RB} = 3\overrightarrow{RC}$, exprimez $\overrightarrow{AR}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.



4.2 Systèmes linéaires d'équations à trois inconnues

Il est toujours possible de faire apparaître, dans un tel système, un système de 2 équations à 2 inconnues. Après résolution d'un tel système, il reste à résoudre la troisième équation.

Exercices

1. Résoudre

$$(a) \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 4y = -2 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 4z = -11 \\ x + y + 2z = 6 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ x - y - 4z = -20 \\ x + y + 2z = 10 \end{cases}$$

2. (Ex 22) Un étudiant a présenté successivement trois examens. Si au quatrième examen il obtient une note égale à celle du premier examen, sa moyenne (des quatre examens) vaudra 10 ;

si à ce quatrième examen, il obtient une note égale à celle du deuxième examen, sa moyenne vaudra 12 et enfin

s'il obtient une note égale à celle du troisième examen à ce quatrième examen, sa moyenne vaudra 14.

Quelles ont été, dans l'ordre chronologique, les notes des trois premiers examens ?

3. (Ex 22) Un couple se lance dans l'élevage de chiens et planifie le volet financier relatif à cette activité.

Chaque année, une somme F rassemble les frais fixes incompressibles (bâtiment, chauffage, eau, électricité). Un autre poste de dépense est consacré aux frais de nourriture et de vétérinaire. Les frais annuels de nourriture sont estimés à un montant B par chien adulte et à douze

euros par chiot. Les frais vétérinaires sont évalués annuellement à un montant V par adulte, le suivi des chiots étant comptabilisé dans le suivi de la mère.

Sachant que le prix de vente d'un chiot est de 1200 euros, que l'élevage comprend N_a femelles adultes et N_y chiots, que tous les chiots sont vendus à la fin de l'année, laquelle de ces quatre formules mathématiques décrit correctement le bénéfice annuel du plan comptable de cet élevage ?

(a) $(1200 - 12) N_y - N_a (F + N_a V + B)$

(b) $(1200 - 12) N_y - (F + N_a (V + B))$

(c) $(1200 - 12) N_y - (F + N_a V + B)$

(d) $(1200 - 12) N_y - (F + V + B) N_a$

4. (Ex 23) Le patron d'une jardinerie a trois types de fertilisant pour le gazon : F_1 , F_2 et F_3

contenant respectivement 30%, 20% et 10% d'azote.

Il projette de les mélanger pour obtenir 500 kg de fertilisant contenant 15% d'azote et souhaite que ce mélange contienne trois fois moins de fertilisant de type F_1 que de type F_2 .

Si on note p_1 , p_2 , p_3 les masses respectives en kilogrammes de F_1 , F_2 et F_3 intervenant dans ce mélange, que vaut $(p_1; p_2; p_3)$?

5. (Ex 25) Le prix d'entrée pour une pièce de théâtre était de 10 euros pour les étudiants, 15 euros pour les seniors et 20 euros pour toutes les autres personnes.

On sait que parmi les 500 billets qui ont été vendus, pour un total de 6500 euros, il y avait trois fois plus de billets au tarif étudiant que de billets au tarif senior.

Quel est, en euros, le montant obtenu par la vente des billets au tarif étudiant ?

partie IV

Retenir et appliquer (m45)

Chapitre 1

Trigonométrie

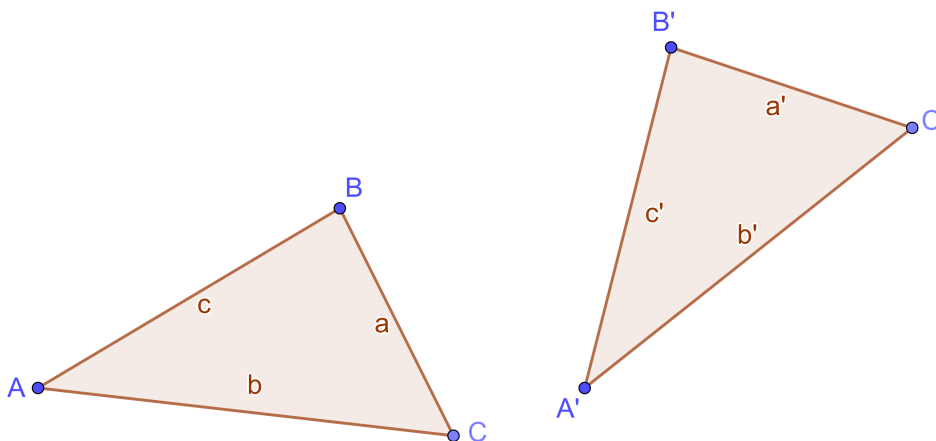
1.0 Prérequis

A retenir

Rappels

- **Définition** : Deux triangles sont isométriques lorsque les côtés de l'un ont des longueurs égales aux côtés de l'autre.

Exemple



Les deux triangles sont isométriques car $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$

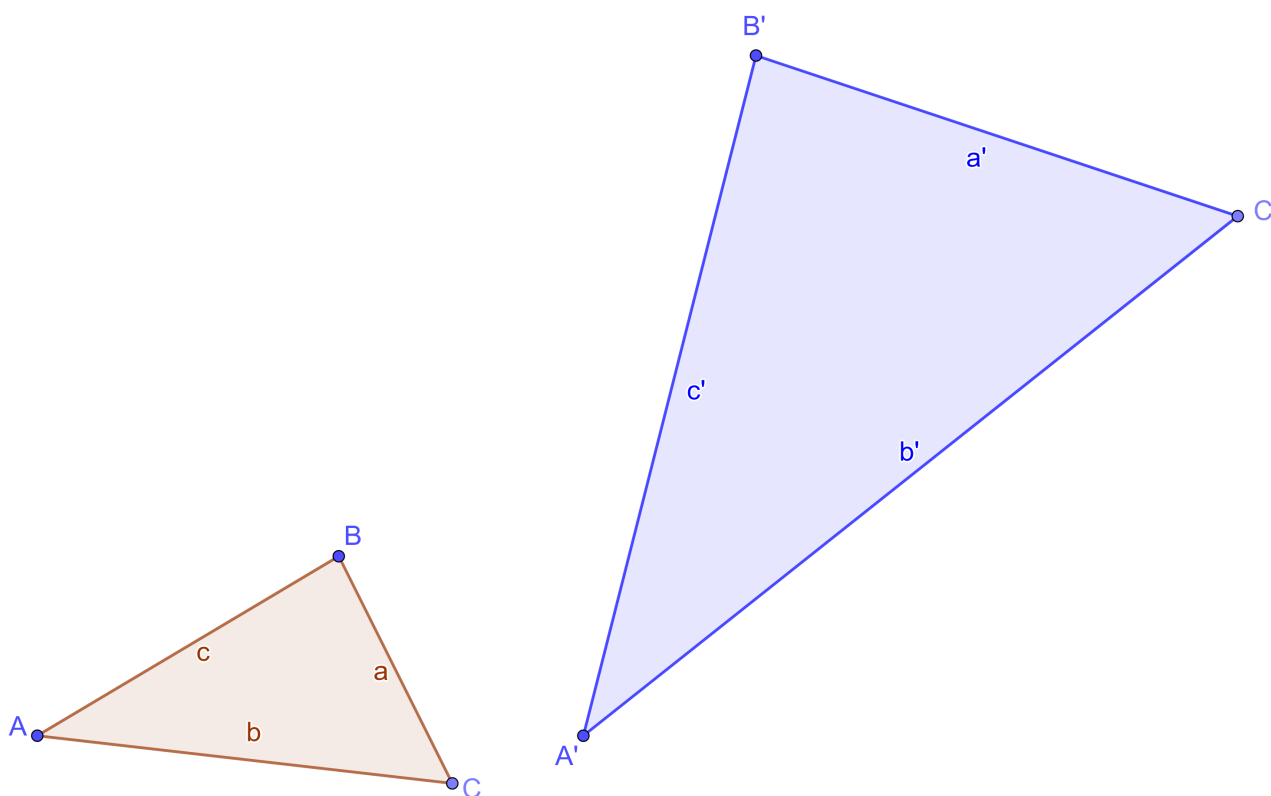
- **Propriété** : lorsque deux triangles sont isométriques, leurs angles respectifs ont mêmes amplitudes. $\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \end{cases}$

Critères des triangles isométriques

- Deux triangles sont isométriques ssi ils ont un angle de même amplitude compris entre deux côtés de mêmes longueurs. (côté - angle - côté)
- Deux triangles sont isométriques ssi ils ont un côté de même longueur compris entre deux angles de mêmes amplitudes. (angle - côté - angle)

• **Définition :** Deux triangles sont semblables lorsque leurs côtés respectifs sont proportionnels.

Exemple



Les deux triangles sont semblables car
$$\begin{cases} a' = 2a \\ b' = 2b \\ c' = 2c \end{cases}$$

- **Propriété :** lorsque deux triangles sont semblables, leurs angles respectifs ont mêmes amplitudes.
$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \end{cases}$$

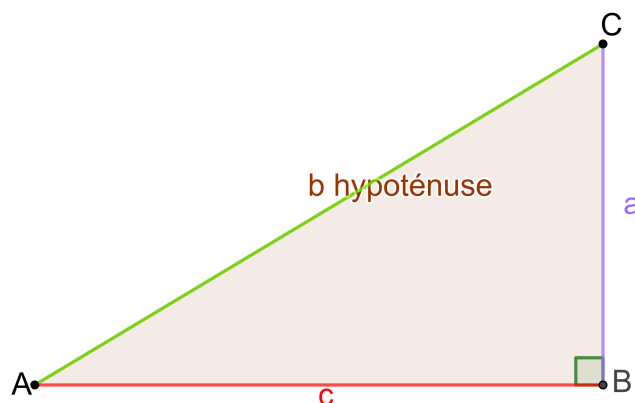
Critères des triangles semblables

- Deux triangles sont semblables ssi ils ont un angle de même amplitude compris entre deux côtés de longueurs proportionnelles. (côté - angle - côté)
- Deux triangles sont semblables ssi ils ont un côté de longueur

proportionnelle compris entre deux angles de mêmes amplitudes.
(angle - côté - angle)

Triangles rectangles

Soit le triangle ABC,
rectangle en B.



sin d'un angle aigu dans un triangle rectangle est égal au rapport du côté opposé à cet angle à l'hypoténuse	SOH	$\sin \hat{A} = \frac{a}{b}$ $\sin \hat{C} = \frac{c}{b}$
cos d'un angle aigu dans un triangle rectangle est égal au rapport du côté adjacent à cet angle à l'hypoténuse	CAH	$\cos \hat{A} = \frac{c}{b}$ $\cos \hat{C} = \frac{a}{b}$
tan d'un angle aigu dans un triangle rectangle est égal au rapport du côté opposé à cet angle au côté adjacent	TOA	$\tan \hat{A} = \frac{a}{c}$ $\tan \hat{C} = \frac{c}{a}$
Le carré de l'hypoténuse...	Pythagore	$b^2 = a^2 + c^2$
Somme des angles intérieurs	180°	$\hat{A} + \hat{C} = 90^\circ$

NB : Il faudrait dire «longueur du côté opposé»... «longueur de l'hypoténuse».

Valeurs remarquables

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Réponses aux exercices

Il y a deux types de formules.

- Celles qui contiennent l'hypoténuse : SOH, CAH et Pythagore.
- Celles qui ne contiennent pas l'hypoténuse : TOA et 90°.

Regarde bien les données et choisis une formule qui ne contient qu'une inconnue !

1. Isole

$$(a) R = \frac{U}{I}$$

$$(b) v = \frac{d}{t}$$

$$(c) r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \text{ si } r \geq 0$$

$$(d) r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} \text{ si } r \geq 0$$

$$(e) y = \frac{x}{t}$$

$$(f) x = \frac{4y + 5}{3}$$

$$(g) y = \frac{5 - x}{2}$$

$$(h) y = \frac{5 - 3x}{4}$$

$$(i) d = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

2. Première série : un angle aigu et un côté sont donnés.

C2

Soit le triangle ABC rectangle en B. Complète le tableau.

a	b	c	$\hat{A}$	$\hat{C}$
17 cm	<u>21,01 cm</u>	<u>12,35 cm</u>	<u>54°</u>	<u>36°</u>
<u>9,51 cm</u>	13 cm	<u>8,87 cm</u>	47°	<u>43°</u>
17 cm	<u>58,15 cm</u>	<u>55,60 cm</u>	17°	<u>73°</u>



<http://tetramath.jean-luc-goffin.be/trigonometrie>

3. Deuxième série : deux côtés sont donnés.

C2

Soit le triangle ABC rectangle en B. Complète le tableau.

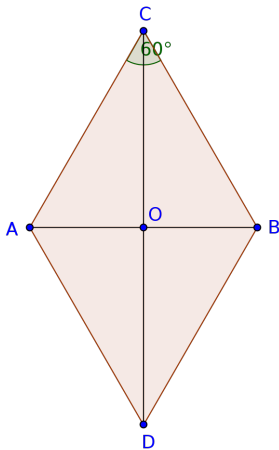
a	b	c	$\hat{A}$	$\hat{C}$
3 cm	<u>5 cm</u>	4 cm	<u>36,87°</u>	<u>53,13°</u>
17 cm	20 cm	<u>10,54 cm</u>	<u>58,21°</u>	<u>31,79°</u>
<u>8,31 cm</u>	13 cm	10 cm	<u>39,72°</u>	<u>50,28°</u>



<http://tetramath.jean-luc-goffin.be/trigonometrie>

4. (Ex 23) Le périmètre d'un losange vaut 80 m et l'amplitude d'un de ses angles vaut 60° .

Que vaut l'aire définie par ce losange ?



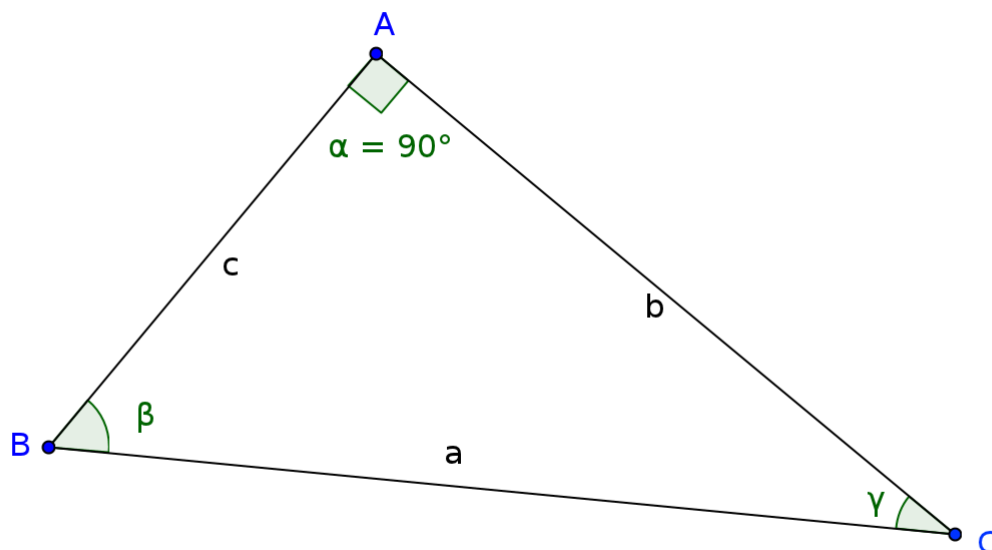
Dans le triangle rectangle OBC,

$$|BC| = 20 \quad |OB| = 20 \sin 30^\circ \quad |OC| = 20 \cos 30^\circ.$$

$$\text{Aire du losange} : 2 |OB| |OC| = 2 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 200\sqrt{3} \text{ m}^2.$$

5. (Ex 24) Un triangle rectangle définit une aire de $200\sqrt{3} \text{ cm}^2$ et un de ses angles a une amplitude de 30° .

Quelle est la longueur (en cm) de son hypoténuse ?



$$\beta = 30^\circ \quad \gamma = 60^\circ \quad bc = 400\sqrt{3}$$

$$b = c \tan 30^\circ = c \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow c \frac{\sqrt{3}}{3} c = 400\sqrt{3} \Rightarrow c^2 = 1200$$

$$b^2 = c^2 \frac{1}{3} = 400$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 1600 \quad \text{Réponse : } 40$$

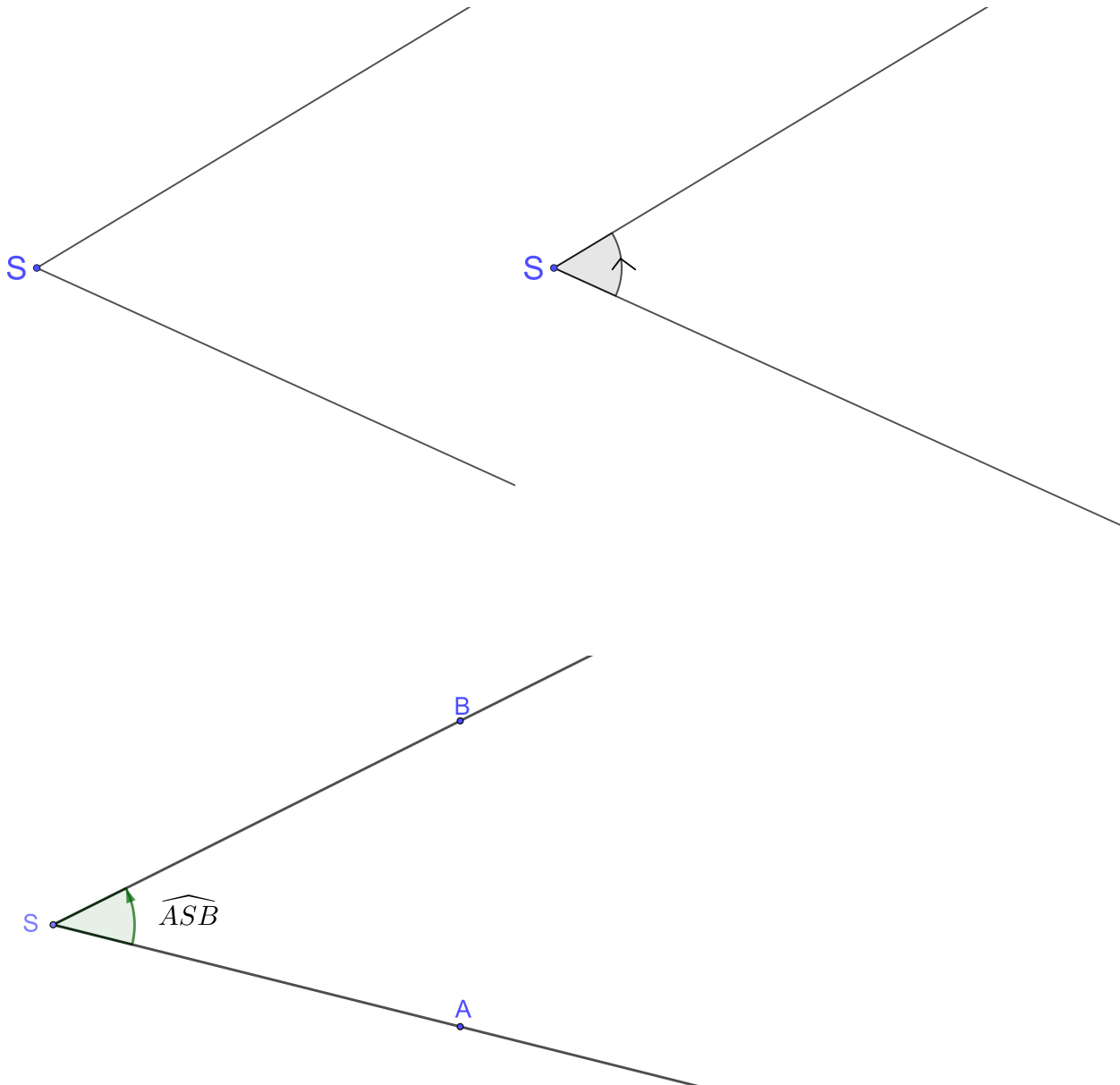
1.1 Angles dans le cercle trigonométrique

A retenir

Définitions

Un angle est formé de deux demi-droites de même origine.
Cette origine est appelée sommet.

Un angle orienté est un angle dont les côtés ont un ordre. Le premier côté est appelé origine de l'angle orienté et le second côté est appelé extrémité.
Le sommet est noté S sur le dessin et la flèche indique l'ordre.



Les angles orientés $\widehat{ASB}$ et $\widehat{BSA}$ diffèrent donc essentiellement par leur sens.

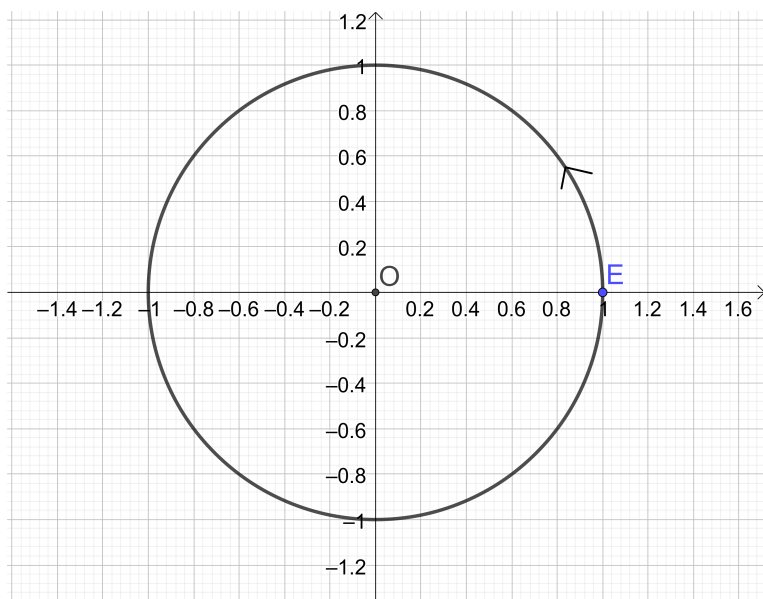
- Une mesure de l'angle orienté $\widehat{ASB}$, notée $|\widehat{ASB}|$, est l'amplitude de l'angle de la rotation de centre O qui applique le côté origine $[OA$ sur le côté extrémité $[OB$.

Définition du cercle trigonométrique

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, le cercle trigonométrique est le cercle

- centré à l'origine du repère
- dont le rayon est 1 (1 unité)
- dont l'origine est le point $E(1; 0)$

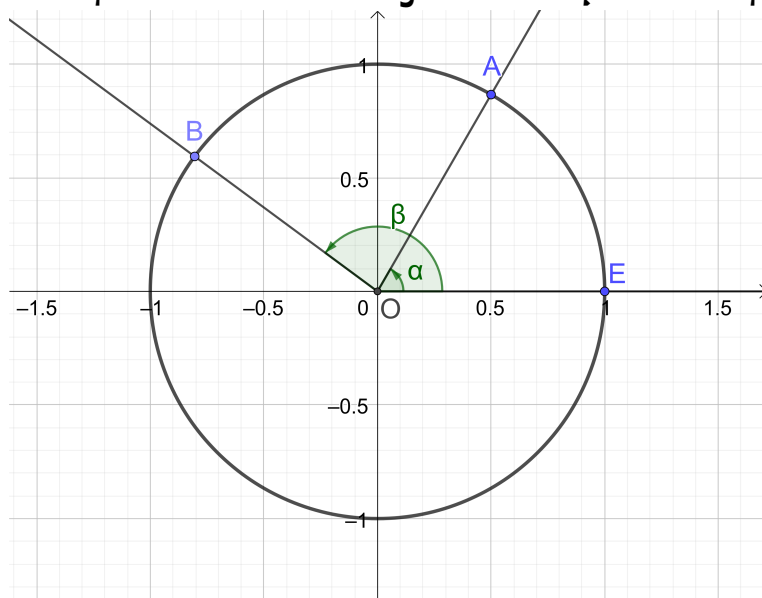
- orienté positivement.



Propriétés

1. Tout angle orienté α est représenté par un point A sur le cercle trigonométrique.

Deux angles orientés sont représentés par deux points différents et tout point du cercle trigonométrique correspond à un angle orienté.



2. Dans le cercle trigonométrique, tout angle orienté possède plusieurs mesures.

Elles diffèrent l'une de l'autre de 360° , c'est-à-dire d'un tour complet.

Un angle orienté a donc une infinité de mesures équivalentes : elles diffèrent entre elles d'un multiple entier de 360° .

Si nous voulions toutes les rassembler en une seule formule, nous dirions que l'angle $\widehat{AOB}$ a pour mesures en degrés $|\widehat{AOB}| = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$, correspondant à « un certain nombre entier de tours »).

Réponses aux exercices

Incursion

Les angles mesurent $55,5^\circ$ (55° et 56° sont de bonnes réponses) et $155,5^\circ$ (155° et 156° sont de bonnes réponses).

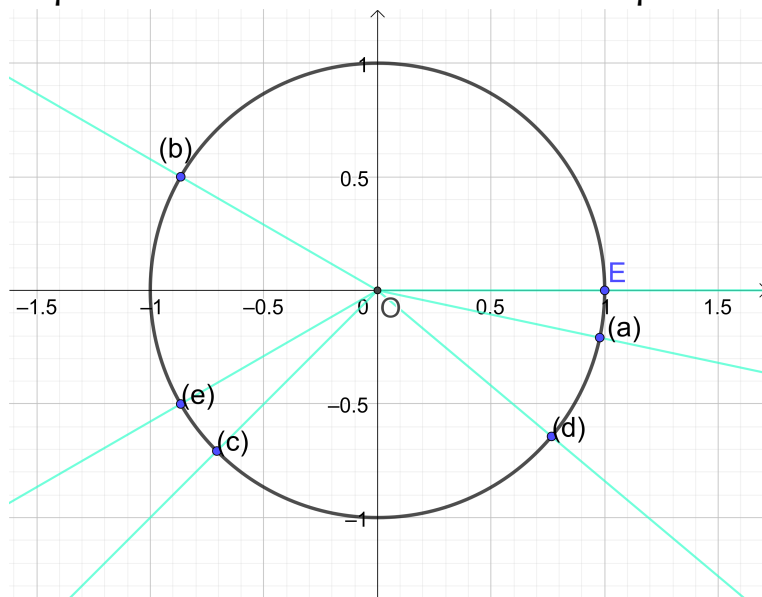
Mesures d'un angle orienté dans le cercle trigonométrique

Autres mesures possibles :

1. $|\widehat{AOB}| = 420^\circ$ car $420^\circ = 60^\circ + \underbrace{360^\circ}_{1 \text{ tour}}$
2. $|\widehat{AOB}| = -660^\circ$ car $-660^\circ = 60^\circ - \underbrace{720^\circ}_{2 \text{ tours}}$
3. $|\widehat{AOB}| = 1140^\circ$ car $1140^\circ = 60^\circ + \underbrace{1080^\circ}_{3 \text{ tours}}$

Exercices

1. Représente et détermine 2 mesures positives et 2 négatives.



$$(a) \quad -12^\circ \quad -372^\circ \quad 348^\circ \quad 708^\circ$$

$$(b) \quad 150^\circ \quad -210^\circ \quad -570^\circ \quad 510^\circ$$

$$(c) \quad -135^\circ \quad -495^\circ \quad 225^\circ \quad 585^\circ$$

$$(d) \quad 320^\circ \quad -40^\circ \quad -400^\circ \quad 680^\circ$$

$$(e) \quad 210^\circ \quad -150^\circ \quad -510^\circ \quad 570^\circ$$

2. Donne la mesure appartenant à l'intervalle $[0^\circ; 360^\circ[$.

$$(a) \quad 150^\circ$$

$$(b) \quad 210^\circ$$

$$(c) \quad 0^\circ$$

$$(d) \quad 260^\circ$$

$$(e) \quad 170^\circ$$

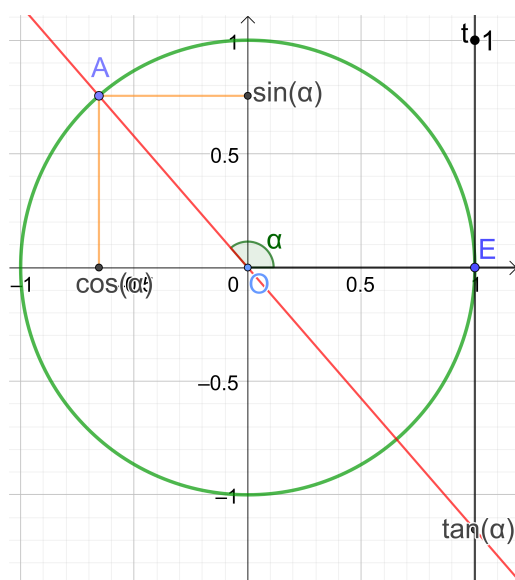
1.2 $\sin$, $\cos$, $\tan$ d'un angle quelconque

A retenir

Ajoutons à côté du cercle trigonométrique l'axe t , parallèle à l'axe vertical, passant par $(1, 0)$ et avec les mêmes graduations.

Si A est l'unique point du cercle trigonométrique déterminé par l'angle orienté d'amplitude α , alors

- le sinus de α ($\sin \alpha$) est l'ordonnée du point A
- le cosinus de α ($\cos \alpha$) est l'abscisse du point A
- la tangente de α ($\tan \alpha$) est la graduation sur l'axe des tangentes du point d'intersection avec la droite OA .



Valeurs remarquables

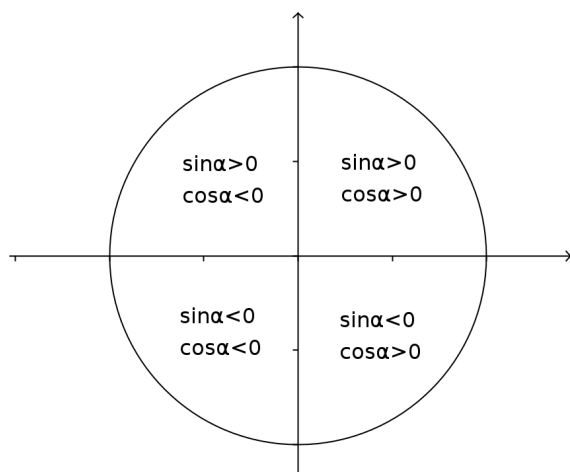
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	?	0	?

Moyen mnémotechnique

Il est aisé de retenir les sinus et cosinus pour les angles particuliers 0° , 30° , 45° , 60° et 90° si on écrit le numérateur sous forme de radical, dans l'ordre :

- pour le sinus : $\frac{\sqrt{0}}{2}$, $\frac{\sqrt{1}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{4}}{2}$, ce qui donne 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1
- pour le cosinus : 1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0, c'est-à-dire l'inverse !

Signe des nombres trigonométriques



Conditions d'existence et valeurs prises par les nombres trigonométriques

1. Tout angle a un sinus et un cosinus.

2. Quel que soit l'angle orienté dont une mesure est α ,

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

3. Les angles droits (positif et négatif) n'ont pas de tangente.

La tangente d'un angle orienté (dont une mesure est α) existe si et seulement si

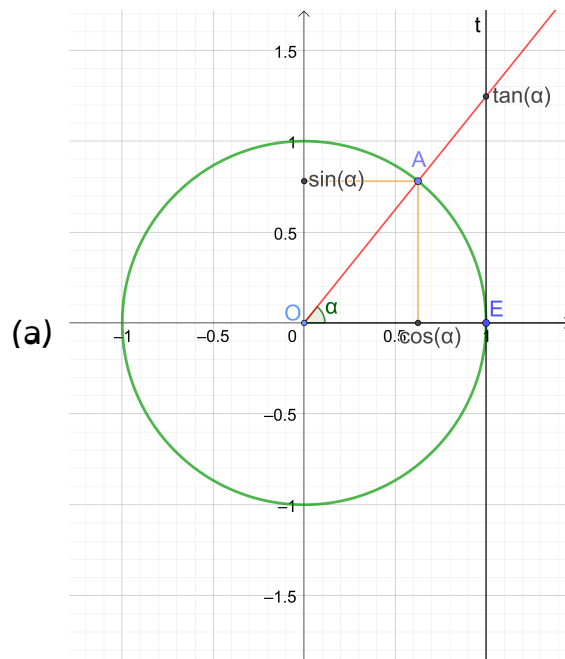
$$\alpha \neq 90^\circ + k.360^\circ \text{ et } \alpha \neq -90^\circ + k.360^\circ$$

ce qui peut se résumer par

$$\text{Conditions d'existence : } \alpha \neq 90^\circ + k.180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Réponses à l'exercice

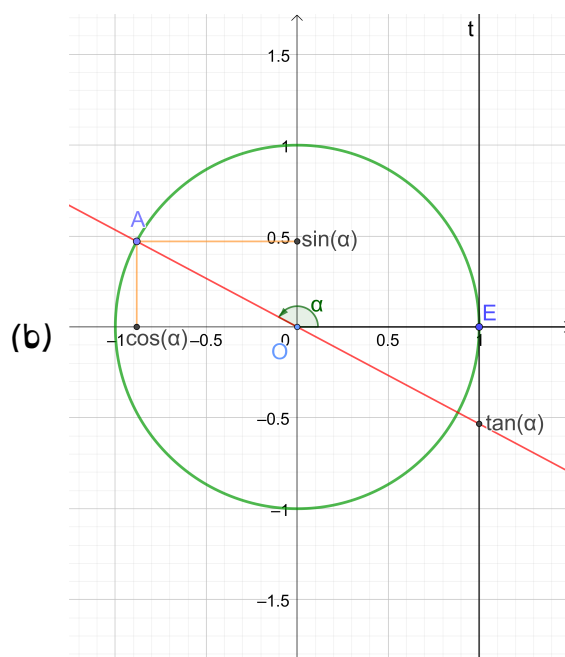
1. Représente $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ et $\tan \alpha$ puis donne-en une valeur approximative.



$$\sin \alpha \cong 0,78$$

$$\cos \alpha \cong 0,63$$

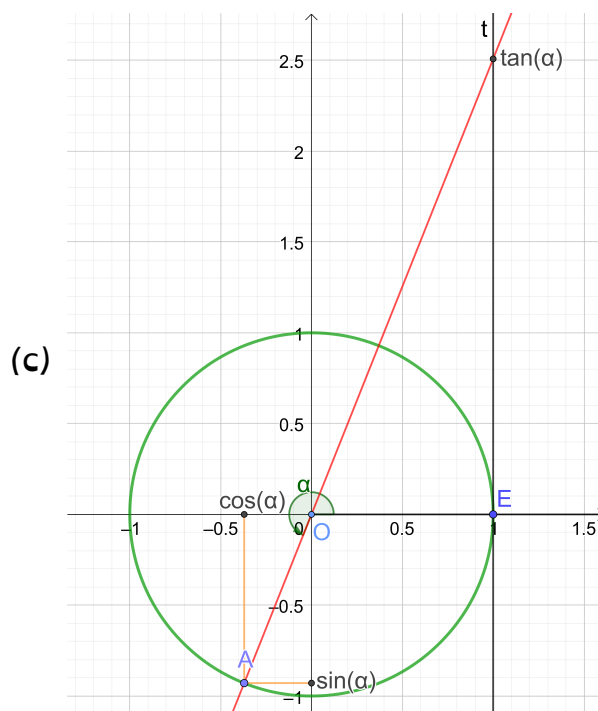
$$\tan \alpha \cong 1,25$$



$$\sin \alpha \cong 0,47$$

$$\cos \alpha \cong -0,88$$

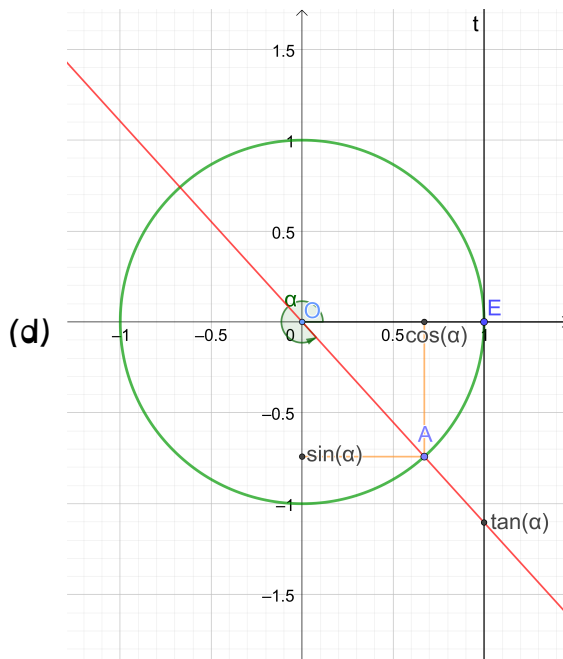
$$\tan \alpha \cong -0,53$$



$$\sin \alpha \cong -0,93$$

$$\cos \alpha \cong -0,37$$

$$\tan \alpha \cong 2,51$$



$$\sin \alpha \cong -0,74$$

$$\cos \alpha \cong 0,67$$

$$\tan \alpha \cong -1,1$$

1.3 Formule fondamentale de la trigonométrie et formule de tan

Quel que soit l'angle orienté dont une mesure est α ,

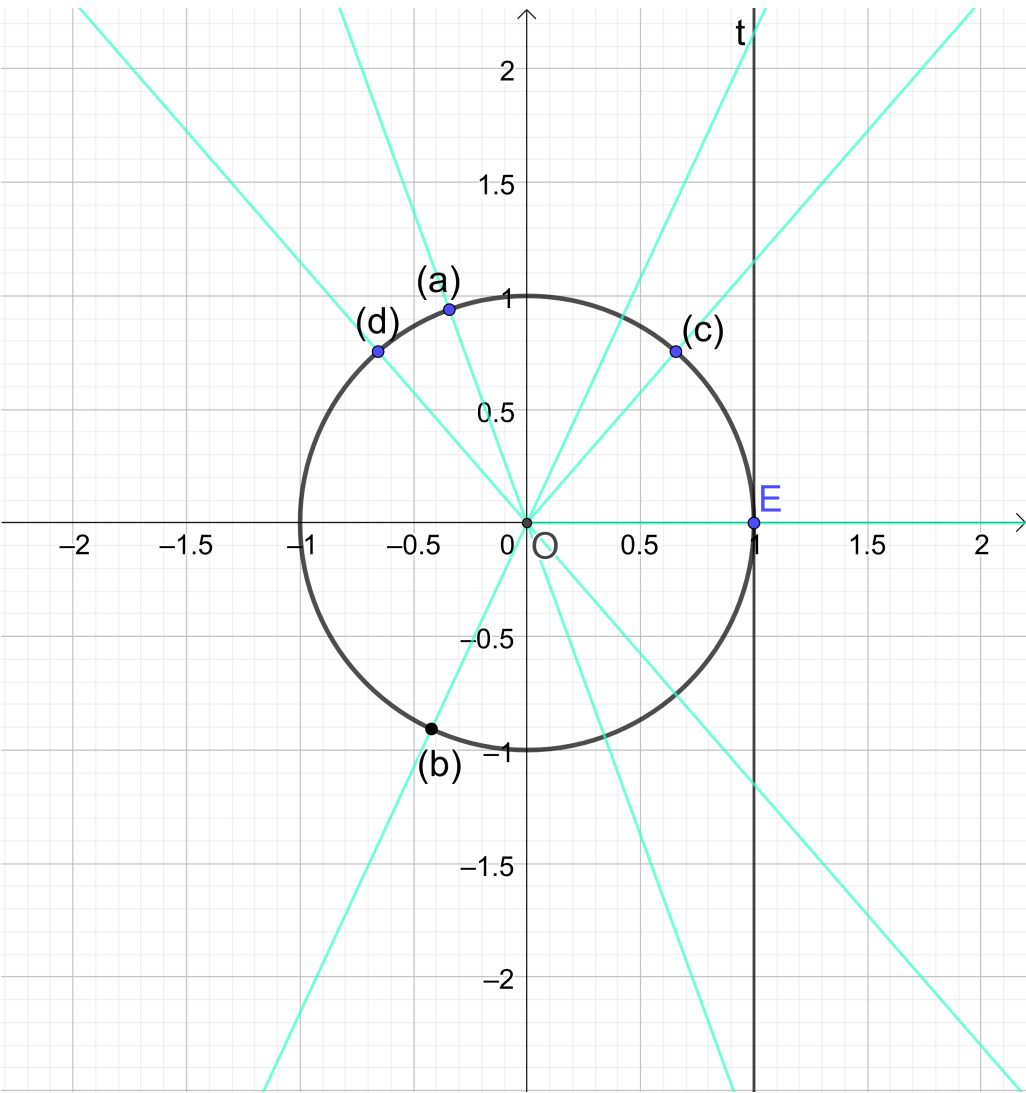
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Formule trigonométrique de $\tan \alpha$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

où α est une mesure d'un angle quelconque non droit.

Réponses à l'exercice



α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$	$\tan \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
110°	0,9	-0,3	-3	0,9	-3	0,9397	-0,3420	-2,7475
246,12°	-0,9	-0,4	2,3	0,97	2,25	-0,9144	-0,4048	2,2588
49°	0,8	0,7	1,2	1,13	1,14	0,7547	0,6561	1,1504
131°	0,8	-0,7	-1,2	1,13	-1,14	0,7547	-0,6561	-1,1504

Remarques

1. Avec des valeurs approximatives de $\sin$ et $\cos$, on a obtenu une erreur sur $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ allant jusqu'à 13%.
2. Les points (c) et (d) sont symétriques.

Exercices supplémentaires

1. Démontre que $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

Suggestion : utilise $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ et $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

2. Sans utiliser la calculatrice, détermine la valeur de chaque nombre trigonométrique de α si

(a) α est dans le même quadrant que -735° et $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

Réponses : α est dans Q_4 . $\sin^2 \alpha + \frac{4}{13} = 1$ $\sin^2 \alpha = \frac{9}{13}$

$\sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$ $\tan \alpha = -\frac{3}{2}$

(b) $\alpha \in Q_2$ et $\tan \alpha = -2$

Réponses : $1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ $\cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$

$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

(c) $\sin \alpha \geq 0$ et $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$

Réponses : $\sin^2 \alpha + \frac{1}{9} = 1$ $\sin^2 \alpha = \frac{8}{9}$ $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan \alpha = -2\sqrt{2}$

(d) $\tan \alpha \geq 0$ et $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$

Réponses : $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ et $\tan \alpha = \frac{3}{4}$

(e) $\cos \alpha \leq 0$ et $\tan \alpha = \frac{7}{24}$

Réponses : $\cos \alpha = -\frac{24}{25}$ et $\sin \alpha = -\frac{7}{25}$

(f) $\alpha \in [-90^\circ; 90^\circ]$ et $\tan \alpha = \frac{1}{4}$

Réponses : $1 + \frac{1}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ $\cos^2 \alpha = \frac{16}{17}$

$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$ $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$

(g) $\tan \alpha \leq 0$ et $\sin \alpha = -\frac{5}{6}$

Réponses : $\frac{25}{36} + \cos^2 \alpha = 1$ $\cos^2 \alpha = \frac{11}{36}$ $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$

$\tan \alpha = -\frac{5}{\sqrt{11}} = -\frac{5\sqrt{11}}{11}$

Chapitre 2

Fonctions



<http://tetramath.jean-luc-goffin.be/fonctions>

2.0 Prérequis

A retenir

Dans tout ce qui suit, a est un nombre réel différent de 0.

Formules des puissances à exposants entiers

$$a^p \cdot a^m = a^{p+m}$$

$$(a^p)^n = a^{p \cdot n}$$

Convention

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Conséquences

$$7^3 \cdot 7^5 = 7^{3+5} = 7^8$$

$$7^{-3} \cdot 7^5 = 7^{-3+5} = 7^2$$

$$7^{-3} \cdot 7^{-5} = 7^{-3+(-5)} = 7^{-8} = \frac{1}{7^8}$$

$$7^{-5} = (7^5)^{-1} = \frac{1}{7^5}$$

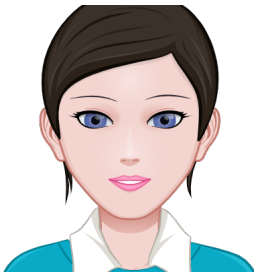
$$\frac{1}{7^{-5}} = \frac{1}{(7^5)^{-1}} = 7^5$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{-5} = \left(\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\right)^5 = 7^5$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{7^2}{3^2} = \frac{49}{9}$$

$$(7^{-2})^5 = 7^{-10} = \frac{1}{7^{10}}$$

$$\frac{7^3}{7^5} = 7^{3-5} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2}$$



Pense que $7^3 = 7.7.7$

et que $7^5 = 7.7.7.7.7$

Ainsi la première et la dernière conséquence deviennent toutes simples.

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

Cette formule est tellement célèbre que du vocabulaire a été inventé :

$a + b$ est le binôme conjugué de $a - b$.

$a - b$ est le binôme conjugué de $a + b$.

Lorsqu'on multiplie un binôme par son conjugué,
l'expression devient une simple soustraction de carrés.

Exemples avec $\sqrt{2} - 5$, $\sqrt{x^2 + 2} - 5$ et $\sqrt{x^2 + x + 1} - x$

$$(\sqrt{2} - 5) \cdot (\sqrt{2} + 5) = (\sqrt{2})^2 - 5^2 = -23$$

$$(\sqrt{x^2 + 2} - 5) \cdot (\sqrt{x^2 + 2} + 5) = (\sqrt{x^2 + 2})^2 - 5^2 = x^2 + 2 - 25 = x^2 - 23$$

$$(\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) = (\sqrt{x^2 + x + 1})^2 - x^2 = x^2 + x + 1 - x^2 = x + 1$$

Racines carrées et cubiques

Définitions

- Une racine carrée du nombre a est un nombre dont le carré vaut a .
 x est une racine carrée de a si et seulement si $x^2 = a$.

- Une racine cubique du nombre a est un nombre dont le cube vaut a .
 x est une racine cubique de a si et seulement si $x^3 = a$.



Ce n'est pas parce qu'un mathématicien définit quelque chose que cela existe !
 Demande-lui de définir un mouton à 5 pattes et il inventera une théorie de 200 pages.
 As-tu déjà vu un mouton à 5 pattes ?

-9 ne possède pas de racine carrée,
 car un carré est toujours positif, il ne peut valoir -9.
 Seuls les nombres positifs ont une racine carrée.
 9 en a même deux : 3 et -3.
 En effet, $3^2=9$ et $(-3)^2=9$ aussi !

Définition

$\sqrt{a}$ est la racine carrée positive du nombre a .
 Condition d'existence : $a \geq 0$.

Propriétés

- Tout nombre strictement positif a possède deux racines carrées opposées, notées $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- $\sqrt{0} = 0$

$\nearrow$ n'existe que si a est positif
 $\sqrt{a}$
 $\searrow$ désigne un réel positif

L'équation $x^2=a$

Complète le tableau.

$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
$x^2 = 5$	$x^2 = 0$	$x^2 = -16$

Remarques

- Pour éviter de lire $\sqrt{a}$ « racine carrée positive de a », on lira $\sqrt{a}$ « radical de a ».

- $\sqrt{a^2} = |a|$

Par exemple,

si $a = 7$, $\sqrt{49} = 7 = |7|$.

si $a = -9$, $\sqrt{81} = 9 \neq a$. En fait, $\sqrt{81} = 9 = |-9| = |a| = -a$.

Propriétés

1. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ où a et b sont des nombres positifs.
2. $\sqrt{a + b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ où a et b sont des nombres strictement positifs.

Exposants rationnels¹

$$a^{\frac{p}{r}} = \sqrt[r]{a^p}$$

Dans cette formule, p et r sont des entiers ($r > 0$) et $a > 0$.

Pourquoi $a > 0$?

Parce que $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^1} = \sqrt{a}$

et ce bon vieux radical ne mange que des nombres positifs.

Et $a = 0$?

$0^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{0^1} = \sqrt{0} = 0$ pas de problème, mais

$a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}}$ et là ça coince !

Exemples

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$a^{-\frac{7}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^7}}$$

Fonction du premier degré

- Une fonction f est du premier degré si $f(x) = mx + p$ avec $m \neq 0$.
- m est appelé pente ou coefficient directeur de la fonction.

Propriétés

- Le graphe d'une fonction du premier degré est une droite.

¹Un nombre rationnel peut s'écrire comme une fraction à termes entiers.

- Lorsque x augmente de 1 unité, $f(x)$ augmente de m unités.

Exemples

x	$f(x) = 2x + 6$
0	6
1	8
2	10
3	12
-1	4
-2	2
-3	0

$\begin{matrix} +2 \\ \leftarrow \\ +2 \\ \leftarrow \\ +2 \\ \leftarrow \end{matrix}$

x	$g(x) = -3x + 7$
0	7
1	4
2	1
3	-2
-1	10
-2	13
-3	16

$\begin{matrix} -3 \\ \leftarrow \\ -3 \\ \leftarrow \\ -3 \\ \leftarrow \end{matrix}$

Racine et signe

Une fonction du premier degré possède une seule racine, obtenue en résolvant $f(x) = 0$.

Son signe est obtenu de la manière suivante :

Si $m > 0$

x		$-\frac{p}{m}$	
$f(x)$	-	0	+

Si $m < 0$

x		$-\frac{p}{m}$	
$f(x)$	+	0	-

Exemples

x		-3	
$f(x) = 2x + 6$	-	0	+

x		$\frac{7}{3}$	
$g(x) = -3x + 7$	+	0	-

Et si $m = 0$?

- $f(x) = p$ définit une fonction constante (droite horizontale).

Inéquations du premier degré

Définitions

- Une équation est une relation d'égalité qui peut être vraie ou fausse.

Exemple : $2x - 1 = 0$ est faux pour $x = 10$ ou $x = 1$ et vraie pour $x = \frac{1}{2}$.

- Une inéquation est une relation d'inégalité qui peut être vraie ou fausse.

Exemple : $2x - 1 > 0$ est vrai pour $x = 10$ ou $x = 1$ et faux pour $x = \frac{1}{2}$.

- Résoudre une (in)équation, c'est déterminer dans quel cas elle est vraie.
- Une telle valeur de l'inconnue est appelée **solution**.

Propriétés

- Il est possible de résoudre une inéquation du premier degré à l'aide d'un tableau de signe, à condition que le second membre soit 0 (ou le premier).



Cette méthode sera utilisée pour d'autres inéquations.

- Ajouter un même nombre aux deux membres d'une (in)équation ne change pas ses solutions.
- Multiplier les deux membres d'une inéquation par un nombre strictement positif ne change pas ses solutions.
- Multiplier les deux membres d'une inéquation par un nombre strictement négatif ($m < 0$) ne change pas ses solutions à condition d'inverser le signe de l'inéquation.

Réponse aux exercices

Puissances

1. Effectue. La réponse est un nombre.

a	-1	16	$\frac{16}{81}$
b	-1	-8	-64
c	1	125	64
d	1	$-\frac{1}{27}$	625
e	$\frac{1}{16}$	9	$\frac{9}{4}$
f	-25	$-\frac{1}{2}$	$\frac{81}{16}$
g	$-\frac{1}{125}$	-9	$-\frac{1}{64}$

2. Écris à l'aide de puissances au numérateur uniquement

a	$x^3.y^{-2}$	$x^3y^{-4}.z^2$	$\frac{x^{-3}.y^{-2}.z^6}{x^3y^{-3}z^4}$
b	$x^4.y^3$	$4x^{-3}.y^{-2}$	$\frac{x^{-3}.y^{-4}.z^{-3}}{x^3y^4.z^{-14}}$
c	$x^{-3}.y^{-2}$	$-\frac{4x^{-3}.y^2}{5}$	$\frac{-5x^9.y^4.z^{-14}}{2}$
d	$x^{-5}.y^3$	$\frac{x^3z^{-3}.y^2}{3}$	

3. Écris à l'aide de puissances à exposant positif

a	$\frac{x}{y^3}$	$2x^5$	$\frac{x}{3y^5}$
b	$\frac{7x^2}{y^3}$	$2x^5y^2$	$\frac{1}{9x^6y^2}$
c	$\frac{2y}{x^5}$	$\frac{3x^5}{y^3}$	$-\frac{4y^5}{81x^{14}}$
d	$-\frac{3}{x^2y^3}$	$\frac{-4y^5}{3x^3}$	

a²-b²

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

4. Effectue

$$\begin{array}{ll} \text{a} & x^2 - 4 \qquad 3x^2 - 12 \\ \text{b} & \frac{a^4}{9} - \frac{4b^2}{25} \qquad -1 \\ \text{c} & 4a^2 - 25c^2 \qquad 5 \\ \text{d} & 81k^4 - 16 \qquad -18 \end{array}$$

5. Factorise

$$\begin{array}{lll} \text{a} & 3x(y+z) & 5x^2 \cdot (x-2) \cdot (x+2) \qquad (x-2) \cdot (x+2) \cdot (x^2+4) \\ \text{b} & (2a-5b) \cdot (2a+5b) & 4(x+5)(x-2) \qquad 24x \\ \text{c} & x \cdot (x-4) \cdot (x+4) & (3x-4) \cdot (-x+2) \qquad (x^2-2x+3) \cdot (x^2+2x-3) \end{array}$$

6. Chasse les radicaux du dénominateur

$$\begin{array}{lll} \text{a} & 7-4\sqrt{3} & -\frac{3\sqrt{10}-9\sqrt{2}}{4} \qquad -4\sqrt{3}-2\sqrt{15} \\ \text{b} & \sqrt{2}-1 & \frac{7\sqrt{5}-7\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \\ \text{c} & 14+5\sqrt{3} & \frac{60+8\sqrt{5}}{41} \qquad \frac{3\sqrt{10}+3\sqrt{5}}{5} \\ \text{d} & \frac{15+5\sqrt{2}}{7} & 7+4\sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2} \end{array}$$

7. (Ex 22) On considère les nombres réels positifs a et b tels que $a^2 \geq b^2$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est égale à

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} ?$$

- (a) $\sqrt{\frac{a+b}{2}}$
 (b) $\sqrt{a-\sqrt{b}}$
 (c) $\sqrt{a+\sqrt{b}}$
 (d) $\sqrt{\sqrt{a}-b}$

Toutes les réponses possibles sont des radicaux. Il est donc judicieux d'élever l'expression de départ (positive) au carré.

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \right)^2 = \\ & \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} + 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} = \\ & \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \sqrt{(a+\sqrt{a^2-b})(a-\sqrt{a^2-b})} = a + \sqrt{a^2 - (a^2-b)} = a + \sqrt{b} \end{aligned}$$

Réponse : $\sqrt{a+\sqrt{b}}$.

8. (Ex 24) On considère l'expression $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$.

Parmi les quatre expressions suivantes, quelle est celle qui est équivalente à celle donnée ci-dessus ?

(a) 1

(b) $\frac{2|a|}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

(c) $\frac{2|b|}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

(d) $\sqrt{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}}$

Notons tout d'abord que les deuxième et troisième expressions peuvent s'écrire

$\frac{2\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ et $\frac{2\sqrt{b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ ce qui signifie que les quatre expressions proposées sont des radicaux.

Cela nous incite à élever l'expression donnée au carré.

$$\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \right)^2 = \frac{a+b}{a-b} + 2\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} + \frac{a-b}{a+b} =$$

$$\frac{a+b}{a-b} + 2 + \frac{a-b}{a+b} = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{a^2 - b^2} + 2 = \frac{2a^2 + 2b^2}{a^2 - b^2} + 2\frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2} =$$

$$\frac{4a^2}{a^2 - b^2} \quad \text{Réponse : } \frac{2\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{2|a|}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

9. Radicaux d'indice 2 ou 3

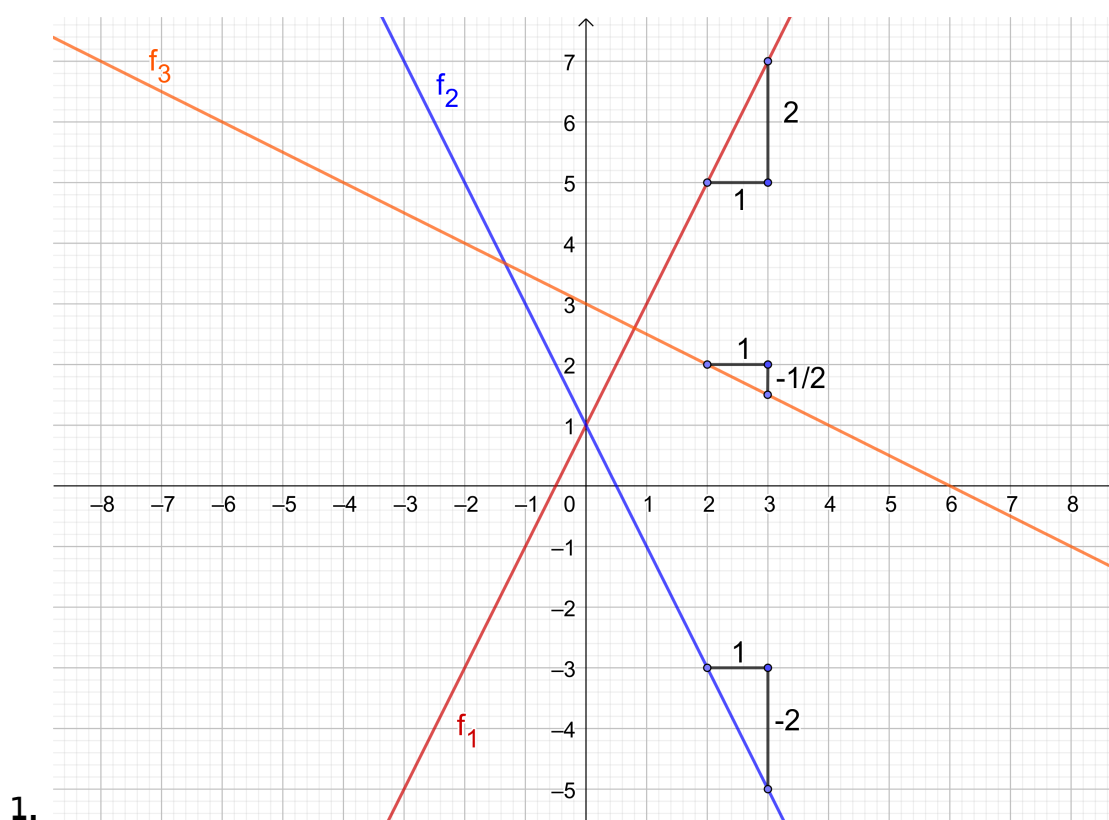
(a) Simplifie les radicaux.

(b) Effectue, si possible.

(c) Chasse les radicaux du dénominateur s'il y en a.

a	$9\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	$-\frac{3}{8}$
b	$10\sqrt{5}$	$\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}$	$7+4\sqrt{3}$
c	$3\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{30}}{3}$	$2\sqrt[3]{4}$
d	$-4\sqrt{2}-8\sqrt{5}+9\sqrt{3}$	$24\sqrt{6}$	$-3\sqrt[3]{3}$
e	$-7\sqrt{3}+2\sqrt{5}$	$-6+9\sqrt{3}$	$3\sqrt[3]{2}$
f	$\frac{23\sqrt{7}}{7}$	$6\sqrt{15}-8\sqrt{30}-54+72\sqrt{2}$	0
g	$9\sqrt{7}$	$12+8\sqrt{2}$	0,2
h	$\frac{7\sqrt{5}}{10}$	$\frac{4\sqrt{6}-3\sqrt{15}}{3}$	$5\sqrt[3]{3}$

Fonctions du premier degré



x	x	x
$2x+1$	$-2x+1$	$-\frac{1}{2}x+3$
Pente : 2	Pente : -2	Pente : $-\frac{1}{2}$

2. (Ex 21) Un gouvernement a prévu une aide A pour les cafés et restaurants fermés en raison de l'épidémie de la COVID-19. Cette aide comprend une part fixe F et une seconde part variable proportionnelle à la

fois au revenu R déclaré pour l'année 2019 et au nombre total N d'heures payées à des travailleurs occupés par l'établissement en 2019.

Décrire A à l'aide d'une formule.

Réponse : $A = F + k \cdot (R + N)$

3. (Ex 21) Une friterie vend son petit paquet de frites au prix de 2,5 euros et son grand paquet de frites au prix de 4 euros. Un habitué remarque que le grand paquet contient le double de frites par rapport au petit paquet.

De quel pourcentage le prix par frite du petit paquet est-il plus élevé (ou plus bas) que pour le grand paquet ?

Soit x , le nombre de frites du petit paquet. Le prix d'une frite du petit paquet est $\frac{2,5}{x}$ et celui d'une frite du grand paquet est $\frac{4}{2x} = \frac{2}{x}$. Il suffit donc de comparer $\frac{2,5}{x}$ et $\frac{2}{x}$.

Réponse : il est 25% plus élevé que pour le grand paquet.

4. (Ex 23) Auparavant, les honoraires pour un traitement chez un dentiste étaient de 50 euros. Le patient ne payait que 22 % de ces honoraires, le reste étant payé par l'assurance-maladie.

Les honoraires ont désormais augmenté de 10 %. Les assurances-maladie font en sorte que les patients paient toujours la même somme pour leur traitement qu'avant l'augmentation.

Quel est le pourcentage des nouveaux honoraires pris en charge par l'assurance-maladie ?

Le patient paie invariablement $22\% \cdot 50 = 11\text{€}$.

Les honoraires sont passés à 55€ dont 44€ pris en charge par l'assurance-maladie,

ce qui représente $\frac{44}{55} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 80\%$.

Exercices supplémentaires

1. Transforme les exposants rationnels en radicaux et simplifie si possible :

(a) $2^{\frac{1}{3}} =$

$\sqrt[3]{2}$

(b) $3^{\frac{1}{2}} =$	$\sqrt{3}$
(c) $2^{-\frac{1}{3}} =$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
(d) $\left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} =$	$\frac{5}{4}$
(e) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-\frac{1}{2}} =$	$\frac{\sqrt{21}}{3}$
(f) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} =$	$\frac{2}{3}$
(g) $27^{\frac{2}{3}} =$	9
(h) $0,01^{-\frac{1}{2}} =$	10

2.  Écris les expressions sous forme d'une puissance de a (a réel positif non nul).

(a) $\sqrt{a} \cdot a =$	$a^{\frac{3}{2}}$
(b) $\sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot a^{-1} =$	a
(c) $(a^4)^{\frac{2}{3}} =$	$a^{\frac{8}{3}}$
(d) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 =$	a^2
(e) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} =$	a^{-1}
(f) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a}} =$	$a^{\frac{5}{3}}$
(g) $\left(\frac{4}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{a^3}{2} =$	$a^{\frac{5}{2}}$
(h) $\frac{(a^{-4})^{\frac{2}{3}}}{(a^2)^{-\frac{1}{3}}} =$	a^{-2}

3.  Reprends les réponses de l'exercice précédent.

Donne ensuite une réponse avec des exposants naturels uniquement.

4. (Ex 23) Auparavant, les honoraires pour un traitement chez un dentiste étaient de 50 euros. Le patient ne payait que 22 % de ces honoraires, le reste étant payé par l'assurance-maladie.

Les honoraires ont désormais augmenté de 10 %. Les assurances-maladie font en sorte que les patients paient toujours la même somme pour leur traitement qu'avant l'augmentation.

Quel est le pourcentage des nouveaux honoraires pris en charge par l'assurance-maladie ?

5. (Ex 25) Un hôpital emploie 2000 personnes soignantes. La répartition est : 50% infirmières, 25% médecins, 25% personnel psychosocial.

Le nombre d'infirmières est insuffisant. L'hôpital décide de remplacer 20% de son personnel psychosocial par des infirmières.

Quel pourcentage du personnel soignant seront des infirmières après ce changement ?

Avant le changement, il y a 1000 infirmières, 500 médecins et 500 psychosoc.

Après le changement, il y a 1100 infirmières, 500 médecins et 400 psychosoc.

Réponse : 55%

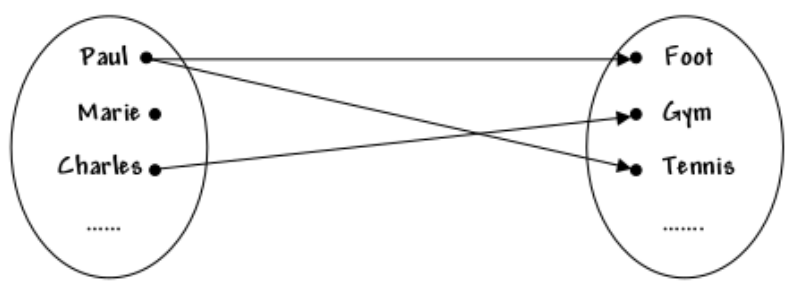
2.1 Caractéristiques d'une fonction

A retenir

Relation

Une relation entre deux ensembles est un ensemble de couples dont chaque premier élément appartient au premier ensemble (antécédent) et chaque deuxième élément appartient au deuxième ensemble (image).

Exemple



On peut établir une relation entre l'ensemble des élèves et le(s) sport(s) éventuellement pratiqué(s).

(Paul, Foot)

(Paul, Tennis)

(Charles, Gym)

ou plus simplement,

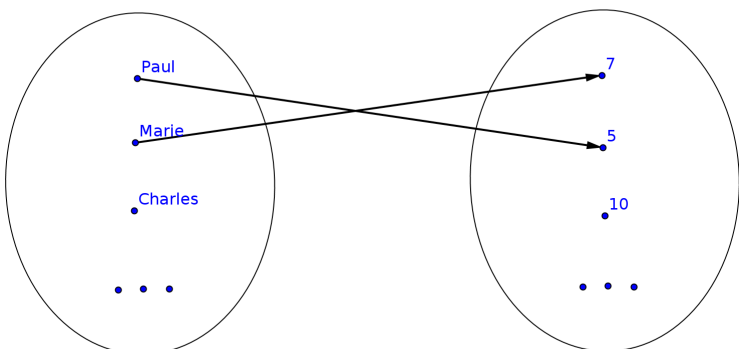
Prénom	Sport
Paul	Foot
Paul	Tennis
Charles	Gym
...	...
...	...

Fonction

Une fonction est une relation pour laquelle chaque antécédent possède une image.

Exemple

On peut établir une fonction entre l'ensemble des élèves et leurs résultats lors d'un test en français.



(Paul, 5)

(Marie, 7)

ou plus simplement,

Prénom	Résultat
Paul	
...	...
...	...

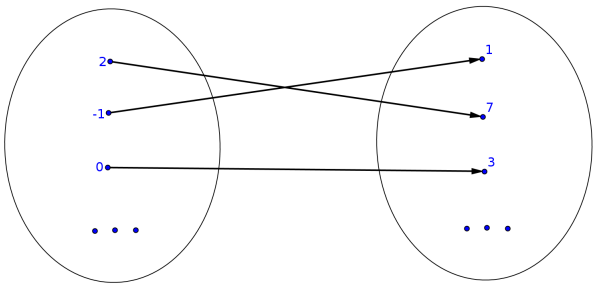
Dans le cadre de ce cours, nous travaillerons avec des fonctions numériques (d'une variable réelle), ce qui signifie que les antécédents et les images sont des nombres réels.

Notation

Une fonction numérique est généralement notée : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$ où x est la variable réelle (un antécédent quelconque) et $f(x)$ est l'image de x .

Exemple

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 2x + 3$$



C'est bien une fonction car chaque nombre réel x a une image $f(x) = 2x + 3$. Par exemple, $f(2) = 7$ et $f(-1) = 1$.

Domaine

Le domaine est l'ensemble des antécédents qui ont une image.

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Domaine et opérations

2

Beaucoup de fonctions de ce cours sont définies
à l'aide des opérations

- + (addition)
- (soustraction)
- × (multiplication)
- : (division)
- √ (radical).
- + (addition), - (soustraction) et × (multiplication)
ne donnent pas de condition d'existence.

Pour : (division) le dénominateur doit être différent de 0.

Pour √ (radical) l'opérande doit être positive.

$\frac{a}{b}$	CE : $b \neq 0$
$\sqrt{a}$	CE : $a \geq 0$

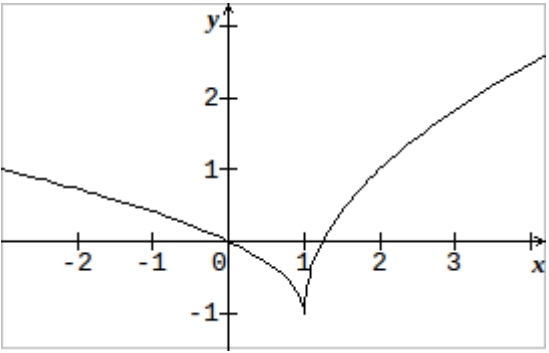
Condition d'existence et intervalle

Condition d'existence	Ensemble des x
$x > a$	$]a; \rightarrow[$
$x \geq a$	$[a; \rightarrow[$
$x < a$	$] \leftarrow; a[$
$x \leq a$	$] \leftarrow; a]$

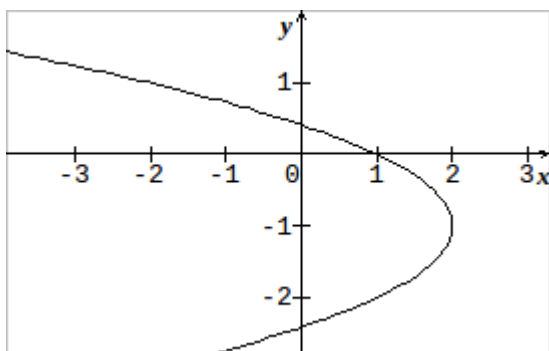
Graphe

Le graphe d'une fonction est l'ensemble des couples $(x, f(x))$ où x appartient au domaine.

Exemple de graphe de fonction numérique



Contre-exemple



Test de la verticale

Un courbe du plan est la représentation graphique d'une fonction si et seulement si aucune droite verticale ne la coupe plus d'une fois.

Ensemble-image

L'ensemble des $f(x)$ tels que x appartient au domaine est l'ensemble des images.

Racines ou zéros d'une fonction

Définition

On appelle zéro (ou racine) d'une fonction tout réel dont l'image par f est nulle.

Propriétés

1. Graphiquement, les zéros (ou racines) d'une fonction correspondent aux abscisses des éventuels points d'intersection du graphe avec l'axe Ox .

Notation : $f \cap Ox$

2. Les racines d'une fonction sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

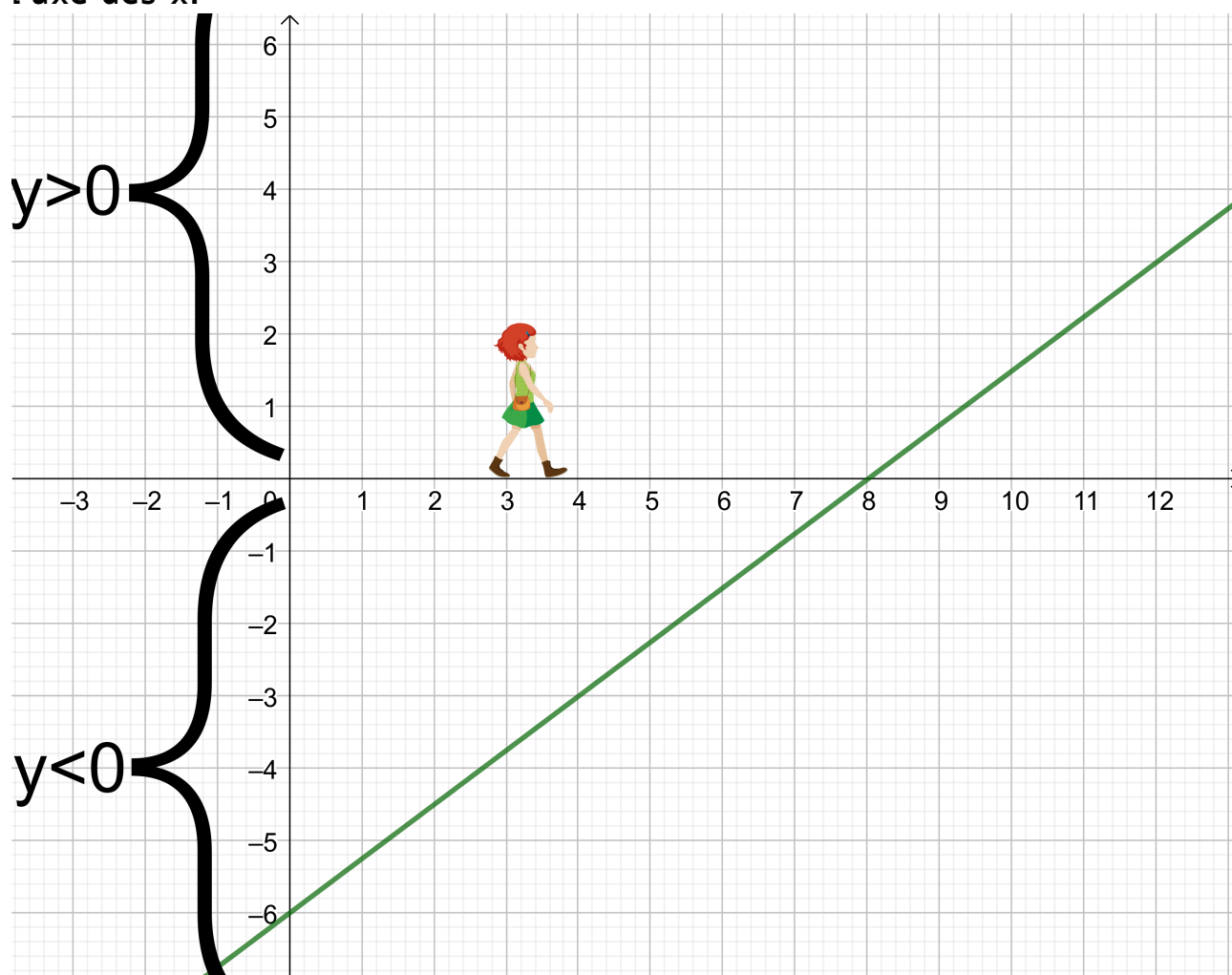
Signe d'une fonction

Le signe d'une fonction est le signe de ses images.

Les images se trouvent sur l'axe vertical, qui est orienté vers le haut.

Ainsi, lorsqu'une fonction est positive, son graphique se trouve au-dessus de l'axe des x .

Lorsqu'une fonction est négative, son graphique se trouve en dessous de l'axe des x .



Cette fonction est négative pour $x < 8$ et positive pour $x > 8$.

Fonctions du premier degré (rappel)

Définition

Une fonction du premier degré est donnée par $f(x) = mx + p$ où $m \neq 0$.

Exemples

1. $f : x \rightarrow x - 4$ $m =$ $p =$

2. $f : x \rightarrow -2x + 8$ $m =$ $p =$

3. $f : x \rightarrow 3 - x$ $m =$ $p =$

Signe

Si m est positif				Si m est négatif			
x	$x < x_1$	x_1	$x > x_1$	x	$x < x_1$	x_1	$x > x_1$
$mx + p$	—	0	+	$mx + p$	+	0	—

Exemple

Quel est le signe de $f(x) = -2x + 3$?

Racine : $x_1 = \frac{3}{2}$ (sol. de l'équation $-2x+3=0$)

Vu que $m : -2$ est négatif, nous obtenons le tableau de signes suivant :

x	$x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$x > \frac{3}{2}$
$-2x + 3$	+	0	—

<p>Cette colonne ↑ représente toutes les valeurs de x inférieures à $3/2$. J'y mets le signe contraire de m. Vérification : Prenons par exemple $x = 1$. $mx + p$ devient $-2.1 + 3 = 1$. Résultat positif (+)!</p>	<p>Cette colonne ↑ représente toutes les valeurs de x supérieures à $3/2$. J'y mets le signe de m. Vérification : Prenons par exemple $x = 4$. Le binôme devient $-2.4 + 3 = -5$. Résultat négatif (-)!</p>
---	--

Trace le graphique de cette fonction.

Réponse aux exercices

1. Parmi les graphes suivants, quels sont ceux qui représentent une fonction numérique ? Donne son domaine et son ensemble-image.

(a) Fonction $\text{dom } f = [-3; 3]$ $\text{im } f = [-4; +\infty[$

(b) Pas une fonction $\text{dom } f = [-2; 2]$ $\text{im } f = [-2; 2]$

(c) Pas une fonction $\text{dom } f = [0; 3]$ $\text{im } f = [-4; 4]$

(d) Fonction $\text{dom } f =]-2, 5; 2, 5[$ $\text{im } f = [0; 6[$

(e) Fonction $\text{dom } f = [-6, 2; 6, 2]$ $\text{im } f = [0; 1]$

(f) Fonction $\text{dom } f = [-1; 4[$ $\text{im } f = [-4; 5[$

2. Détermine le domaine de la fonction f .

(a) $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$

(b) $[1; \rightarrow[$

(c) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

(d) $[-1; \rightarrow[$

(e) $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$

3. Détermine le domaine et l'intersection avec les axes de coordonnées de la fonction f

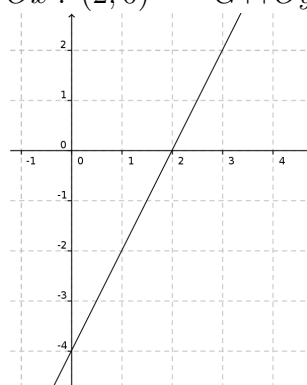
	Domaine	$f \cap Ox$	$f \cap Oy$
a)	$dom f = \mathbb{R}$	$f \cap Ox : (-1; 0) \text{ et } (3; 0)$	$f \cap Oy : (0; 2)$
b)	$dom f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$	$f \cap Ox : \left(\frac{3}{2}; 0\right)$	$f \cap Oy : (0; 3)$
c)	$\mathbb{R}$	$(0; 0) (\sqrt{3}; 0) \text{ et } (-\sqrt{3}; 0)$	$(0; 0)$
d)	$\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_0$	$\emptyset$	$\emptyset$
e)	$\mathbb{R}$	$(1; 0)$	$(0; -1)$
f)	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$	$\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$	$(0; -3)$
g)	$\mathbb{R} \setminus \{0; 5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
h)	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{7}\right\}$	$\emptyset$	$\left(0; -\frac{2}{3}\right)$
i)	$\left[\leftarrow; \frac{1}{2}\right]$	$\left(\frac{1}{2}; 0\right)$	$(0; 1)$
j)	$\mathbb{R}$	$\left(\frac{1}{2}; 0\right)$	$(0; 1)$
k)	$] -4; \rightarrow[$	$\emptyset$	$\left(0; -\frac{9}{2}\right)$
l)	$] \leftarrow; 1[$	$\emptyset$	$(0; -2)$
m)	$\left[\frac{3}{2}; \rightarrow\right[$	$\emptyset$	$\emptyset$
n)	$]1; \rightarrow[$	$(2; 0)$	$\emptyset$
o)	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$
p)	$[-4; 1[\cup]1; \rightarrow[$	$(-4; 0)$	$(0; -2)$
q)	$] \leftarrow; -4[\cup] -4; 3]$	$(3; 0)$	$\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{16}\right)$
r)	$\left[\leftarrow; \frac{1}{2}\right]$	$\left(\frac{1}{2}; 0\right)$	$\left(0; -\frac{1}{2}\right)$
s)	$\left[-3; \frac{1}{4}\right[$	$(-3; 0)$	$(0; \sqrt{3})$
t)	$\left[\frac{1}{2}; \rightarrow\right[$	$\emptyset$	$\emptyset$
u)	$]1; 2]$	$(2; 0)$	$\emptyset$

4. Détermine le domaine, les intersections avec les axes, le tableau de signe et le tableau de variation de la fonction f . Trace ensuite son graphique.

(a) $f(x) = 2x - 4$ $\text{dom } f = \mathbb{R}$ $G \cap Ox : (2; 0)$ $G \cap Oy : (0; -4)$

x		2	
$2x - 4$	-	0	+

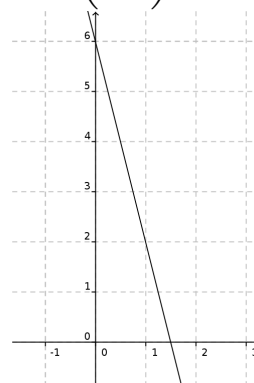
x	
f	$\nearrow$



(b) $f(x) = 6 - 4x$ $\text{dom } f = \mathbb{R}$ $G \cap Ox : \left(\frac{3}{2}; 0\right)$ $G \cap Oy : (0; 6)$

x		$\frac{3}{2}$	
$6 - 4x$	+	0	-

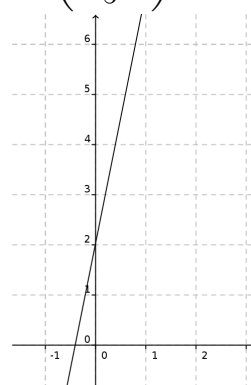
x	
f	$\searrow$



(c) $f(x) = 5x + 2$ $\text{dom } f = \mathbb{R}$ $G \cap Ox : \left(-\frac{2}{5}; 0\right)$ $G \cap Oy : (0; 2)$

x		$-\frac{2}{5}$	
$5x + 2$	-	0	+

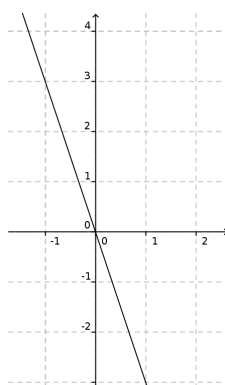
x	
f	$\nearrow$



(d) $f(x) = -3x$ $\text{dom } f = \mathbb{R}$ $G \cap Ox : (0; 0)$ $G \cap Oy : (0; 0)$

x		0	
$-3x$	+	0	-

x	
f	$\searrow$



2.2 Variation et parité

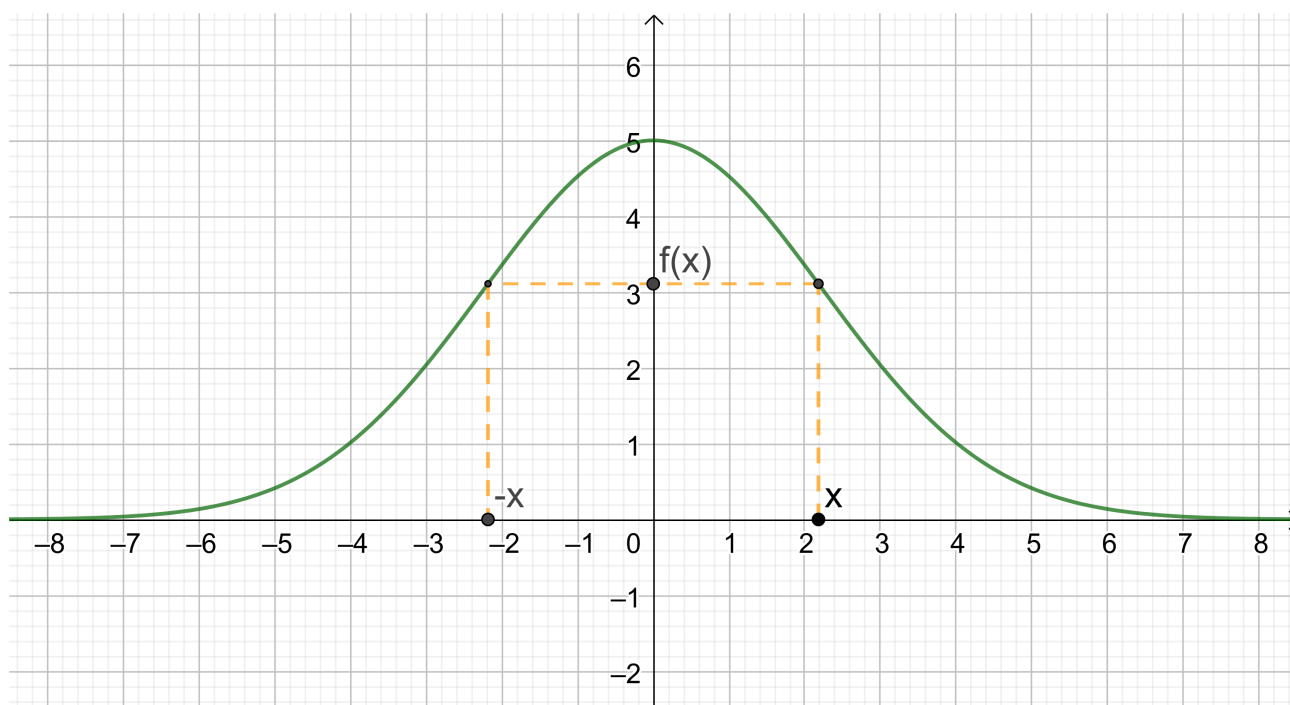
A retenir

Définitions

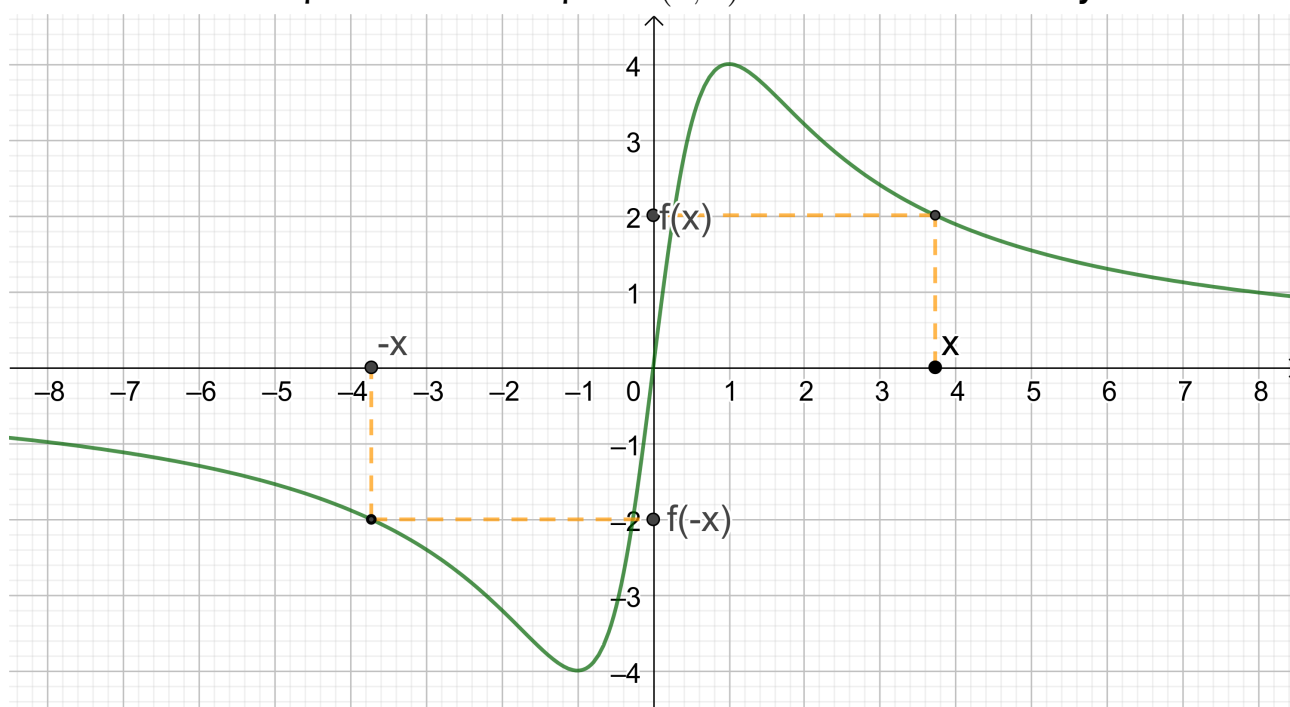
- Une fonction f est croissante lorsque plus x est grand, plus $f(x)$ est grand.
 f est une fonction croissante ssi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Une fonction f est décroissante lorsque plus x est grand, plus $f(x)$ est petit.
 f est une fonction décroissante ssi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- Une fonction f est paire lorsque $f(-x) = f(x)$, pour tout x de son domaine.
- Une fonction f est impaire lorsque $f(-x) = -f(x)$, pour tout x de son domaine.

Propriétés

- Une fonction paire admet l'axe des ordonnées (y) comme axe de symétrie.



- Une fonction impaire admet le point $(0; 0)$ comme centre de symétrie.



Réponse aux exercices

- $\text{dom } f = [-5; 5]$ $\text{im } f = [-1; 1, 5]$
 f est strictement croissante sur $[-2; 1] \cup [4; 5]$
 f est strictement décroissante sur $[-5; -2] \cup [3; 4]$
 f est constante sur $[1; 3]$

- Pour la fonction, détermine :

(a) $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{2} \right\}$

(b) $f(-4) = -\frac{3}{2} \quad f(2) = -2$

(c) $f(1) = -1 \quad f(4) = 2$

(d) $-\frac{7}{2} \quad 2 \quad 6$

(e) $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2 \quad f(4) = 2$

(f) $\text{Max}(4; 2) \quad \text{Min}(2; -2)$

(g) $0 \quad 3 \quad 5$

(h)

x		$-\frac{5}{2}$		2		4	
$f(x)$	$\searrow$	$ $	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$

3. On étudie l'efficacité (en pourcentage) d'une poudre à laver en fonction de la température d'utilisation de l'eau de lavage utilisée.

(a)

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$f(x)$	12	20	40	85	100	80	50	35	20	10	7

(b) 40°

(c) à 28° et 50°

(d) entre 28° et 50°

(e)

x	0		40		100
f	m	$\nearrow$	M	$\searrow$	m_2

4. Justifie

(a) $f(-x) = 2x^4 + 3x^2 - 4 = f(x)$ La fonction est paire.

(b) $f(-x) = -3x^3 + x = -(3x^3 - x) = -f(x)$ La fonction est impaire.

(c) $f(-x) = -2x^3 + 1 = -(2x^3 - 1)$ La fonction n'est ni paire ni impaire.

5. Graphique complet de 2 fonctions

(a) $\text{dom } f = [-7; 5]$

$\text{im } f = [-3; 5]$

zéros : -6 et -1

$f \cap Oy : (0; 2)$

Ni paire, ni impaire

x	-7		-3		3		5
$f(x)$	4	$\searrow$	m	$\nearrow$	5	$\searrow$	2

(b) $\text{dom } h = [-3; 3]$

$\text{im } h = [-15; 15]$

zéros : -2, 0 et 2

$h \cap Oy : (0; 0)$

Impaire

x	-3		-1		1		3
$h(x)$	-15	$\nearrow$	M	$\searrow$	-4	$\nearrow$	15

6. Étude algébrique de la parité

(a) $f(-x) = 2x^4 + 3x^2 - 4 = f(x)$ **La fonction est paire.**

(b) $f(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x)$ **La fonction est impaire.**

(c) $f(-x) = -x^3 - 1$ **La fonction n'est ni paire ni impaire.**

(d) $f(-x) = \frac{1}{x^2 + 4} = f(x)$ **La fonction est paire.**

(e) $f(-x) = \frac{x^2 + 7}{x^4} = f(x)$ **La fonction est paire.**

(f) $f(-x) = \frac{-x^3 - x}{2x^2} = -\frac{x^3 + x}{2x^2} = -f(x)$ **La fonction est impaire.**

(g) $f(-x) = \frac{-x^3 + 2x}{-x^5}$ **La fonction est paire.**

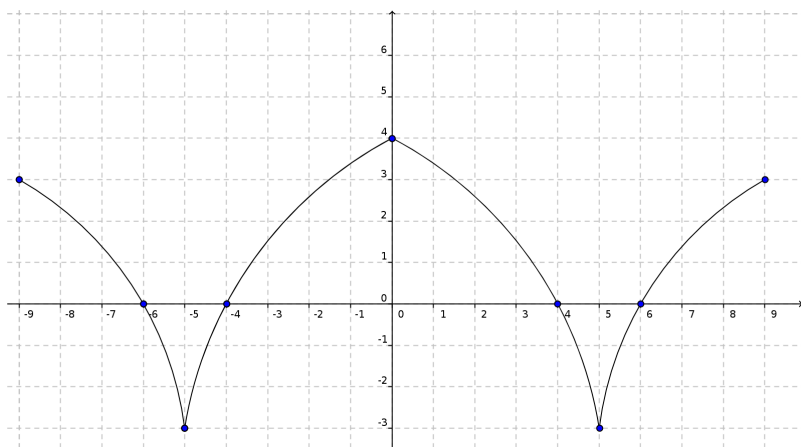
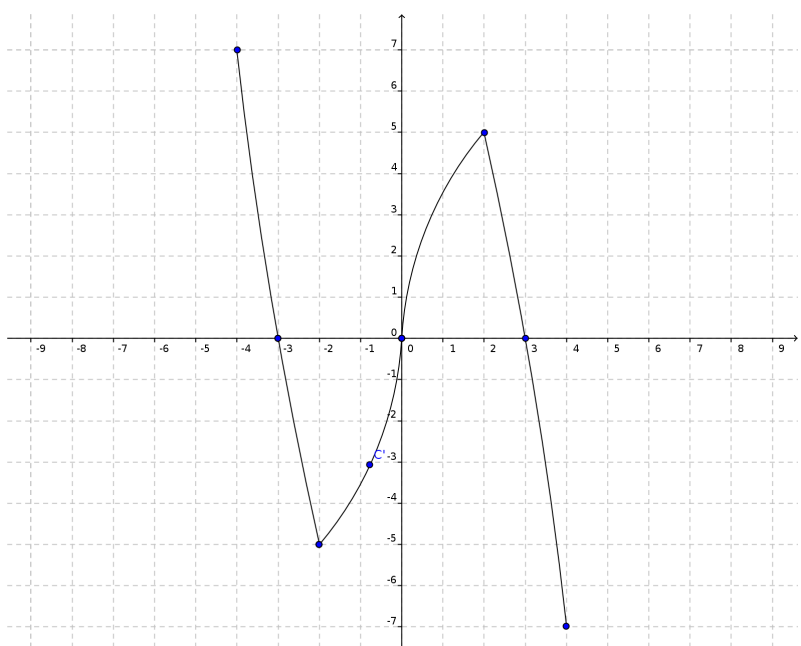
(h) $f(x) = \frac{x^4 + x + 1}{-x}$ **La fonction n'est ni paire ni impaire.**

(i) $f(x) = \frac{x^4 - 1}{-x} = -\frac{x^4 - 1}{x}$ **La fonction est impaire.**

Exercices supplémentaires

Dans un repère cartésien du plan, invente le graphique d'une fonction possédant les caractéristiques suivantes :

1. f de domaine $[-9; 9]$, paire, admettant 4 et 6 pour uniques zéros positifs, admettant un maximum pour $x = 0$ et un minimum pour $x = 5$.
2. g de domaine sur $[-4; 4]$, impaire, admettant 0 et 3 pour zéros, telle que $\text{img} = [-7; 7]$, possédant un maximum en 2 dont l'image est 5, croissante sur $[0; 2]$ et décroissante sur $[2; 4]$.



2.3 Les sept fonctions de référence

A retenir

Les points importants des 7 fonctions de référence, leurs graphiques, domaines, ensembles-images, tableaux de signe, tableaux de variation et parité.

2.4 Transformées des fonctions de référence

A retenir

A partir de f , construire	Transformation des coordonnées	Graphiquement
$h(x) = -f(x)$	$(x; y) \rightarrow (x; -y)$	symétrie d'axe Ox
$i(x) = f(-x)$	$(x; y) \rightarrow (-x; y)$	symétrie d'axe Oy
$j(x) = f(x) + p$	$(x; y) \rightarrow (x; y + p)$	translation verticale de p unités
$k(x) = f(x + p)$	$(x; y) \rightarrow (x - p; y)$	translation horizontale de $-p$ unités
$l(x) = p.f(x)$	$(x; y) \rightarrow (x; p.y)$	déformation verticale de coefficient p
$m(x) = f(p.x)$	$(x; y) \rightarrow \left(\frac{x}{p}; y\right)$	déformation horizontale de coefficient $\frac{1}{p}$

Remarque

Pour les déformations, si le coefficient de la déformation est supérieur à 1, on parle d'étirement. Si ce coefficient est compris entre 0 et 1, on parle alors de contraction ou de compression.

Réponse aux exercices

1. Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$, exprime avec $f(x)$:

(a) $g(x) = f(x) + 2$

(b) $h(x) = f(x - 1)$

(c) $i(x) = -f(2x)$

(d) $j(x) = 5.f(x) - 3$

2. A partir de la fonction donnée par $f(x) = \sqrt{x}$, construis le graphe cartésien des fonctions suivantes. Précise dans chaque cas la transformation effectuée.

1) $g(x) = \sqrt{x} - 1$

Translation verticale
de -1 unité

2) $h(x) = \sqrt{x+2}$

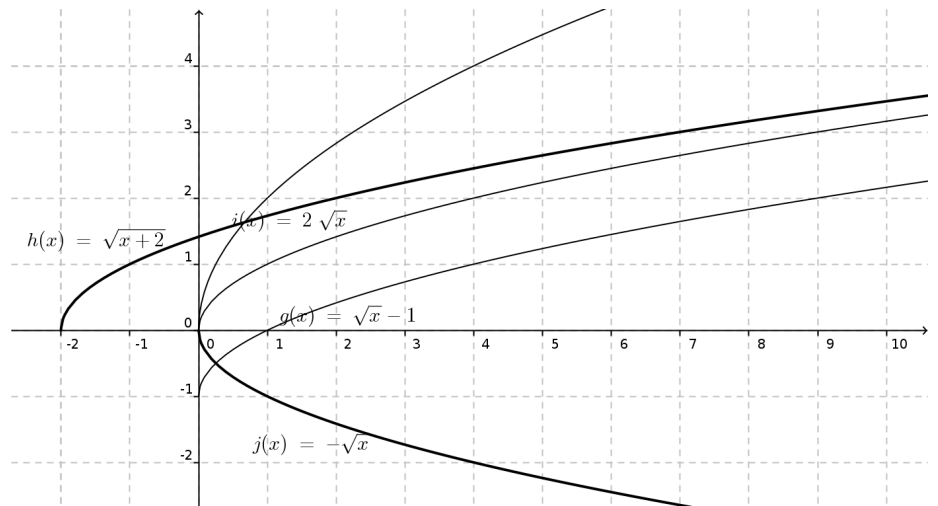
Translation horizontale
de -2 unités

3) $i(x) = 2\sqrt{x}$

Déformation verticale
de coefficient 2

4) $j(x) = -\sqrt{x}$

Symétrie d'axe Ox



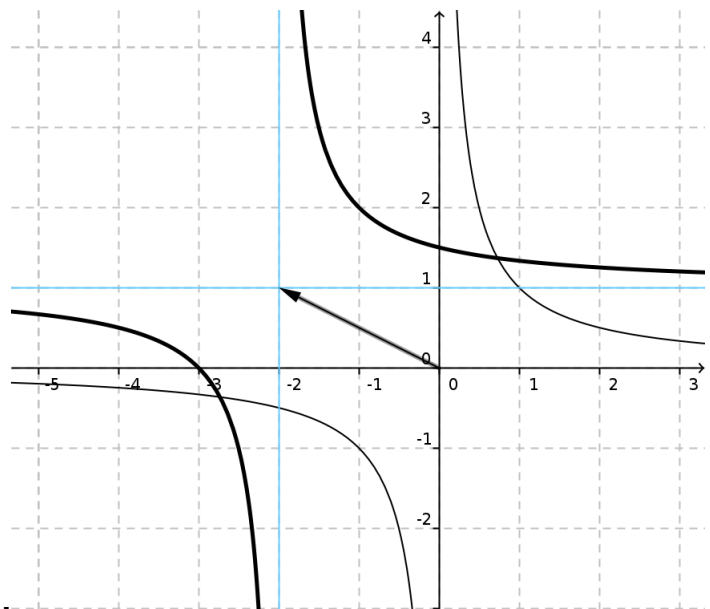
3. ● En partant de $f(x) = \frac{1}{x}$

(a) cite les transformations (du plan et des coordonnées) qui permettent de passer au graphe de $g(x) = \frac{1}{x+2} + 1$.

$$g(x) = f(x+2) + 1$$

Translation horizontale de -2 unités composée à une translation verticale de 1 unité.

$$(x; y) \rightarrow (x - 2; y + 1)$$



(b) Trace les deux fonctions.

4. ● Chacune des fonctions suivantes a un graphe cartésien qui est obtenu en transformant celui d'une fonction de référence.

(c) Retrouve la fonction de référence dont est issu le graphe

(d) Précise la transformation qui a permis de l'obtenir.

(e) Trouve la formule de la fonction dessinée.

Graphe	Fonction de référence	Transformation	Expression
a	$f(x) = x^2$	Translation verticale de -4 unités $(x; y) \rightarrow (x; y - 4)$	$a(x) = x^2 - 4$
b	$f(x) = \sqrt{x}$	Symétrie axiale d'axe Ox $(x; y) \rightarrow (x; -y)$	$b(x) = -\sqrt{x}$
c	$f(x) = \sqrt{x}$	Symétrie axiale d'axe x suivie d'une symétrie axiale d'axe Oy $(x; y) \rightarrow (-x; -y)$	$c(x) = -\sqrt{-x}$
d	$f(x) = x $	Translation verticale de -1 unité	$d(x) = x - 1$
e	$f(x) = \frac{1}{x}$	Translation horizontale de 1 unité $(x; y) \rightarrow (x + 1; y)$	$e(x) = \frac{1}{x - 1}$
f	$f(x) = x^2$	Translation horizontale de -2 unités $(x; y) \rightarrow (x - 2; y)$	$f(x) = (x + 2)^2$
g	$f(x) = x $	Translation horizontale de 1 unité $(x; y) \rightarrow (x + 1; y)$	$g(x) = x - 1 $
h	$f(x) = x^2$	Translation horizontale de -2 unités suivie d'une translation verticale de -1 unité $(x; y) \rightarrow (x - 2; y - 1)$	$h(x) = (x + 2)^2 - 1$
i	$f(x) = x^2$	Translation horizontale de -1 unité suivie d'une symétrie d'axe Ox et enfin une translation verticale de 1 unité $(x; y) \rightarrow (x - 1; y + 1)$	$i(x) = -(x + 1)^2 + 1$
j	$f(x) = \sqrt{x}$	Symétrie axiale d'axe Oy $(x; y) \rightarrow (-x; y)$	$j(x) = \sqrt{-x}$
k	$f(x) = x^3$	Translation horizontale de -1 unité suivie d'une translation verticale de -1 unité $(x; y) \rightarrow (x - 1; y - 1)$	$k(x) = (x + 1)^3 - 1$

5. Partant de $f(x) = x^2$, écris :

(a) $4.f(x) = 4.x^2$

(b) $f(-x) = (-x)^2 = x^2$

(c) $f(x+7) = (x+7)^2$

(d) $f(x-2) = (x-2)^2$

(e) $f(x) - 1 = x^2 - 1$

(f) $-f(x) = -x^2$

(g) $f(2x) = 4x^2$

6. Cite les transformations du plan et des coordonnées.

Expression	Transformation	Transformation des coordonnées
a) $g(x) = f(x) + 5$	Translation verticale de 5 unités	$(x; y) \rightarrow (x; y + 5)$
b) $g(x) = 5.f(x)$	Déformation verticale (étirement) de coefficient 5	$(x; y) \rightarrow (x; 5y)$
c) $g(x) = f(x - 3)$	Translation horizontale de 3 unités	$(x; y) \rightarrow (x + 3; y)$
d) $g(x) = f(x + 1) + 2$	Translation horizontale de -1 unité suivie d'une translation verticale de 2 unités	$(x; y) \rightarrow (x - 1; y + 2)$
e) $g(x) = -f(x)$	Symétrie d'axe x	$(x; y) \rightarrow (x; -y)$
f) $g(x) = f\left(\frac{x}{3}\right)$	Déformation horizontale (étirement) de coefficient 3	$(x; y) \rightarrow (3x; y)$
g) $g(x) = \frac{1}{7}.f(x)$	Déformation verticale (compression) de coefficient 7	$(x; y) \rightarrow (x; \frac{y}{7})$
h) $g(x) = -f(2x) + 3$	Déformation horizontale (compression) de coefficient 1/2 suivie d'une symétrie d'axe x puis d'une translation verticale de 3 unités	$(x; y) \rightarrow (\frac{x}{2}; -y + 3)$

Exercice supplémentaire

Équations liées aux fonctions de référence

Dans les équations suivantes, le membre de gauche est une fonction de référence ou une transformée de fonction de référence. Représente-la puis résous algébriquement et graphiquement l'équation (précision : 5 décimales).

1. $\frac{1}{x} = 4$

2. $\frac{2}{x-3} = 5$

3. $x^3 = -5$

4. $x^3 = \frac{1}{4}$

5. $(x+2)^3 = 3$

6. $|x| = \frac{7}{4}$

7. $2|x+5| = 3$

8. $\sqrt{x} = \frac{7}{4}$

9. $\sqrt{2-x} = \frac{5}{2}$

10. $\sqrt[3]{x} = \frac{3}{2}$

11. $\sqrt[3]{x-3} = -\frac{3}{2}$

12. $x^2 = 5$

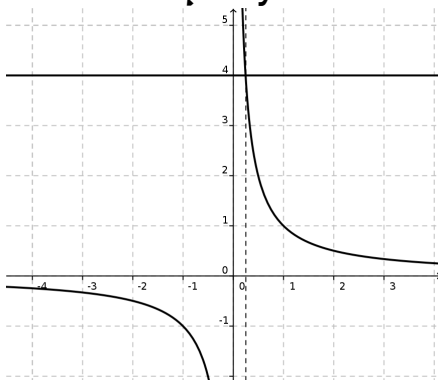
13. $x^2 = -3$

14. $x^2 = 0$

15. $(2x-4)^2 = 5$

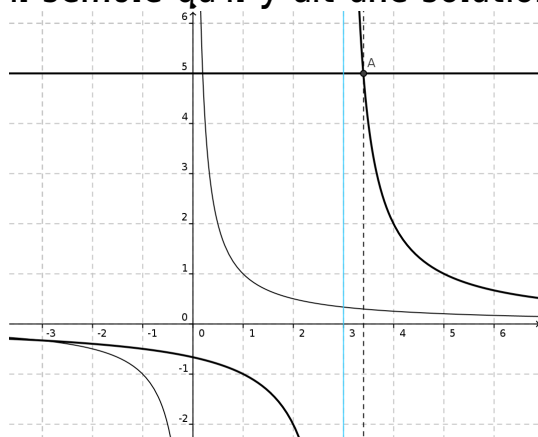
Réponses

1. Il semble qu'il y ait une solution $x \cong 0,3$



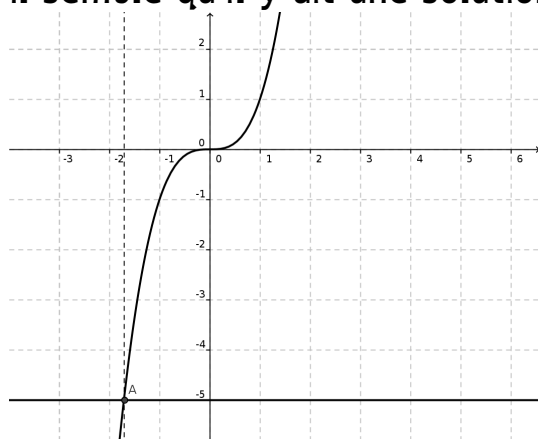
$$\frac{1}{x} = 4 \Rightarrow 1 = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{4} \quad S = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$$

2. Il semble qu'il y ait une solution $x \cong 3,3$



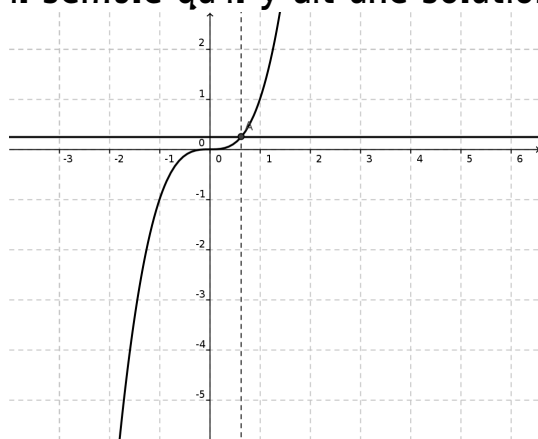
$$\frac{2}{x-3} = 5 \Rightarrow 2 = 5x - 15 \Rightarrow x = \frac{17}{5} \quad S = \{3, 4\}$$

3. Il semble qu'il y ait une solution $x \cong -1,7$



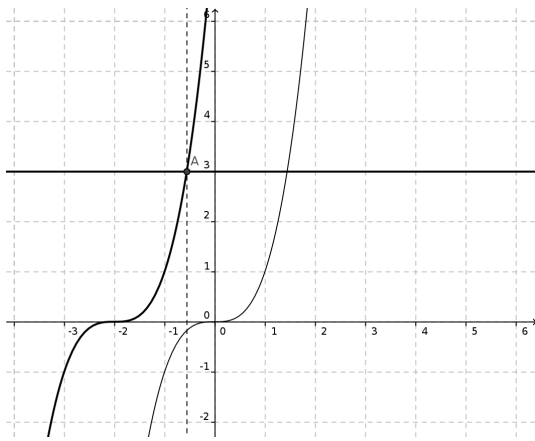
$$x^3 = -5 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-5} \quad S = \{-1, 70998\}$$

4. Il semble qu'il y ait une solution $x \cong 0,6$



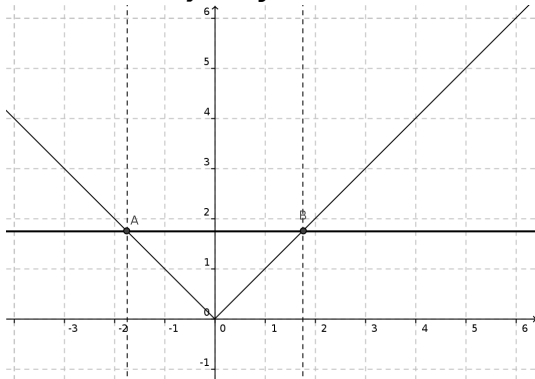
$$x^3 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \quad S = \{0, 62996\}$$

5. Il semble qu'il y ait une solution $x \cong -0,6$



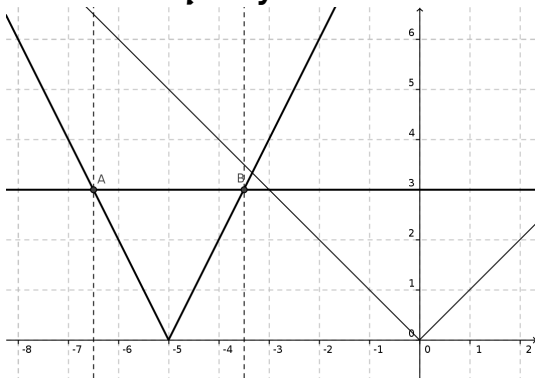
$$(x+2)^3 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3} - 2 \quad S = \{-0,55775\}$$

6. Il semble qu'il y ait deux solutions $x \cong \pm 1,7$



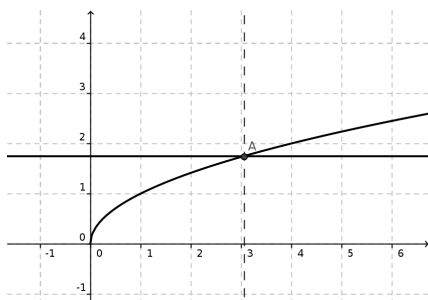
$$|x| = \frac{7}{4} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{7}{4} \quad (x \geq 0) \\ \text{ou} \quad -x = \frac{7}{4} \quad (x \leq 0) \end{array} \quad S = \left\{ -\frac{7}{4}; \frac{7}{4} \right\}$$

7. Il semble qu'il y ait deux solutions $x \cong -6,6$ et $x \cong -3,6$



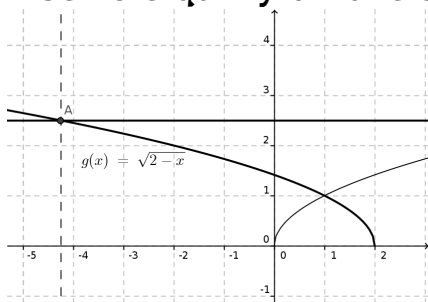
$$2|x+5| = 3 \Rightarrow |x+5| = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} x+5 = \frac{3}{2} \quad (x+5 \geq 0) \\ \text{ou} \quad -(x+5) = \frac{3}{2} \quad (x+5 \leq 0) \end{array} \quad S = \left\{ -\frac{7}{2}; -\frac{13}{2} \right\}$$

8. Il semble qu'il y ait une solution $x \cong 3,1$



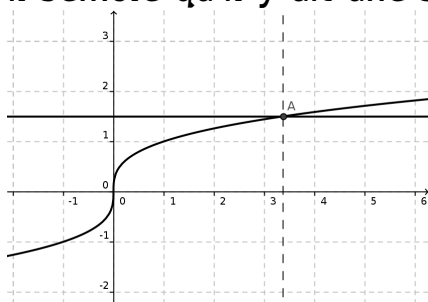
$$\sqrt{x} = \frac{7}{4} \Rightarrow x = \frac{49}{16} \quad S = \{3,0625\}$$

9. Il semble qu'il y ait une solution $x \cong -4,3$



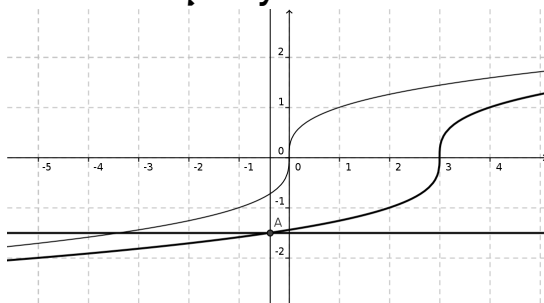
$$\sqrt{2-x} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2-x = \frac{25}{4} \Rightarrow x = -\frac{17}{4} \quad S = \{-4,25\}$$

10. Il semble qu'il y ait une solution $x \cong 3,4$



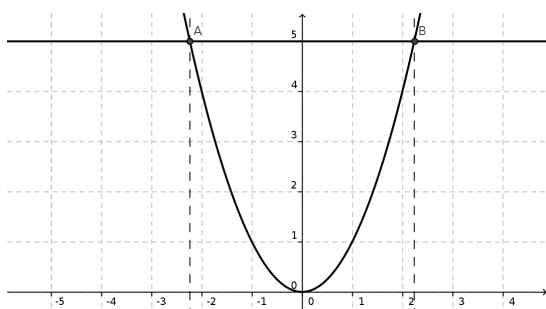
$$\sqrt[3]{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{27}{8} \quad S = \{3,375\}$$

11. Il semble qu'il y ait une solution $x \cong -0,4$



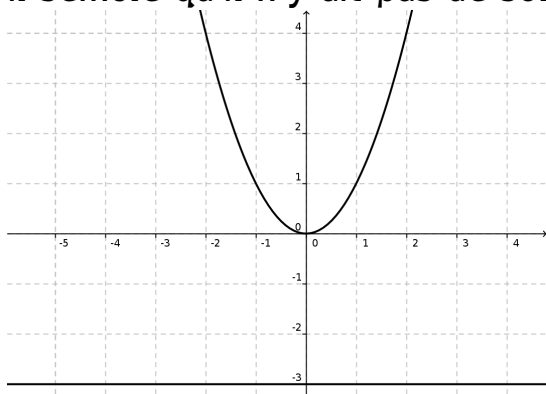
$$\sqrt[3]{x-3} = -\frac{3}{2} \Rightarrow x-3 = -\frac{27}{8} \Rightarrow x = -\frac{3}{8} \quad S = \{-0,375\}$$

12. Il semble qu'il y ait deux solutions $x \cong -2,3$ et $x \cong 2,3$



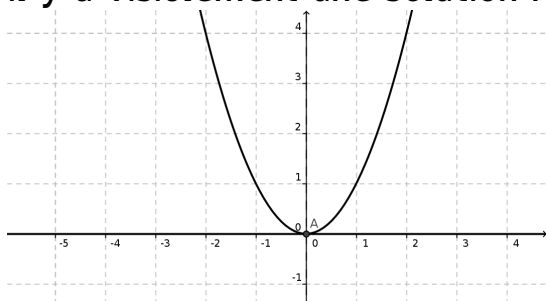
$$x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \quad S = \{-2,23607; 2,23607\}$$

13. Il semble qu'il n'y ait pas de solution.



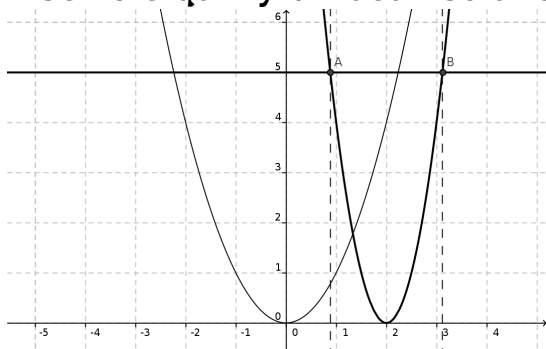
$$x^2 = -3 \text{ est impossible car } x^2 \geq 0 \quad S = \emptyset$$

14. Il y a visiblement une solution : $x = 0$



$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad S = \{0\}$$

15. Il semble qu'il y ait deux solutions $x \cong 0,8$ et $x \cong 3,2$



$$(2x - 4)^2 = 5 \Rightarrow \begin{array}{l} 2x - 4 = \sqrt{5} \\ \text{ou } 2x - 4 = -\sqrt{5} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{4 + \sqrt{5}}{2} \\ \text{ou } x = \frac{4 - \sqrt{5}}{2} \end{array} \quad S = \{0,88197; 3,11803\}$$

2.5 Transformées de x^2

A retenir

1. Le passage de $f(x) = x^2$ à $g(x) = a(x + m)^2$ se caractérise par

une translation horizontale de $-m$ unités

suivie d'une déformation verticale de coefficient $|a|$;

si a est négatif, la déformation est composée

avec une symétrie d'axe horizontal.

$$(x; y) \rightarrow (x - m; ay)$$

2. La courbe obtenue s'appelle une parabole.

3. L'axe de symétrie, axe des ordonnées (y) pour la fonction x^2 ,

devient la droite verticale d'équation $x = -m$.

Réponse aux exercices

1. Partant de $f(x) = x^2$, passe à g tel que $g(x) = (x + 2)^2$.

(a) Pour t'aider, remplis le tableau suivant.

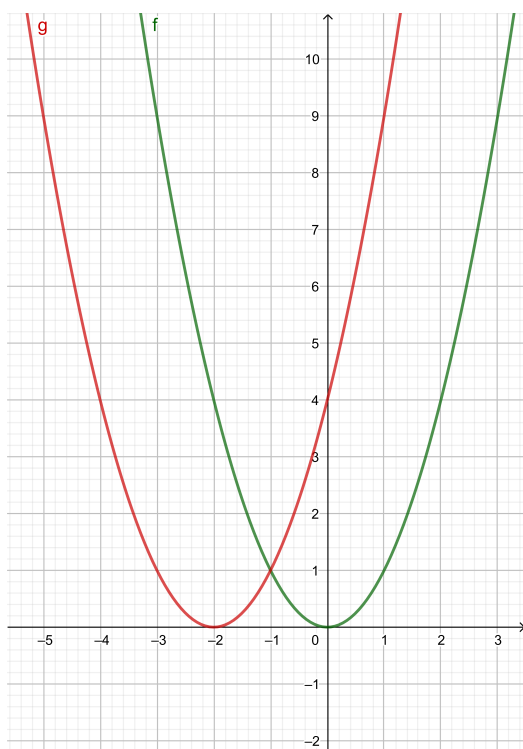
J'ai déjà complété une ligne.

x	$x+2$	$(x+2)^2$
		0
0	2	4
		9

Ainsi, pour arriver à 4, il faut partir de 0 et pas de 2.

Translation horizontale de -2 unités.

(b) $(x; y) \rightarrow (x - 2; y)$

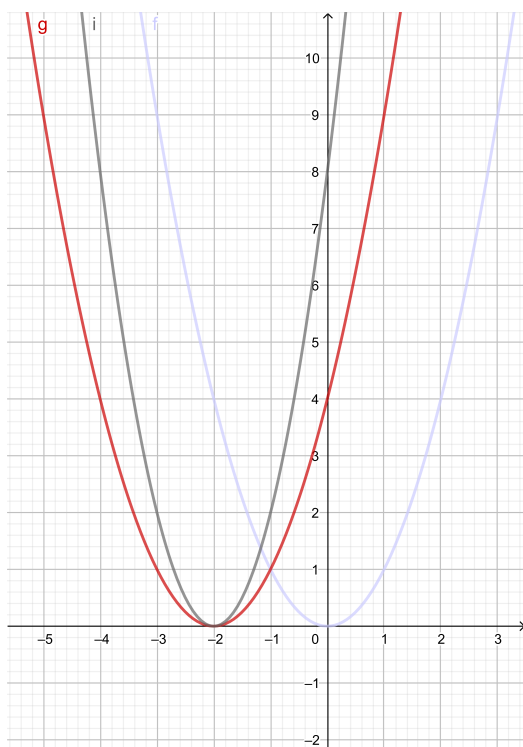


(c)

2. Partant de $g(x) = (x+2)^2$, passe à i tel que $i(x) = 2(x+2)^2$.

(a) Déformation verticale de coefficient 2 (dilatation).

(b) $(x; y) \rightarrow (x; 2y)$

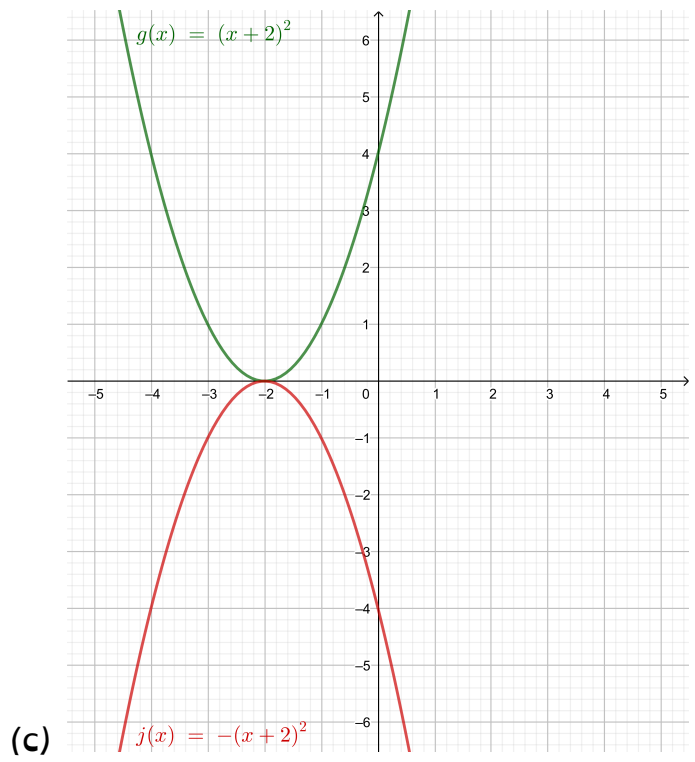


(c)

3. Partant de $g(x) = (x+2)^2$, passe à j tel que $j(x) = -(x+2)^2$.

(a) Symétrie d'axe horizontal.

(b) $(x; y) \rightarrow (x; -y)$



4. Partant de $f(x) = x^2$, passe à h tel que $h(x) = (x-3)^2$.

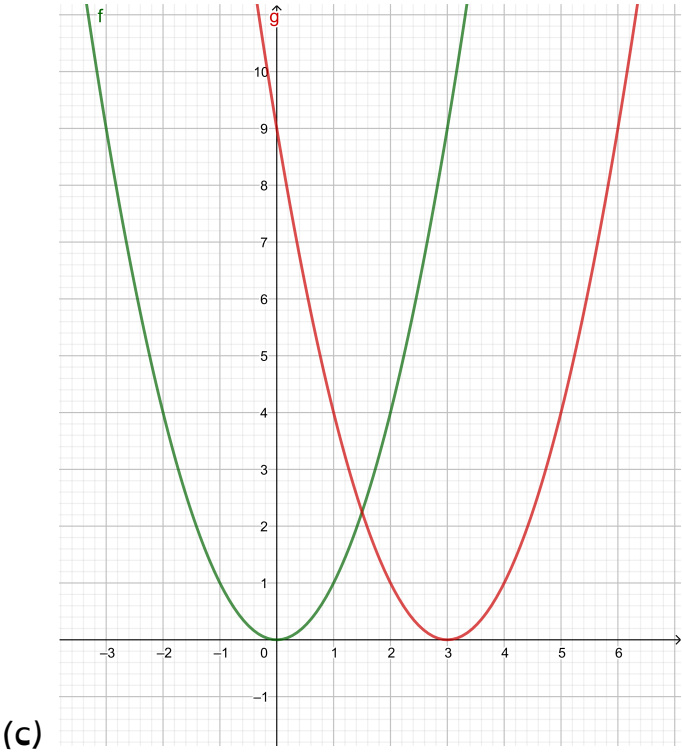
(a) Pour t'aider, remplis le tableau suivant.

x	$x-3$	$(x-3)^2$
		0
5	2	4
		9

Ainsi, pour arriver à 4, il faut partir de 5 et pas de 2.

Translation horizontale de 3 unités.

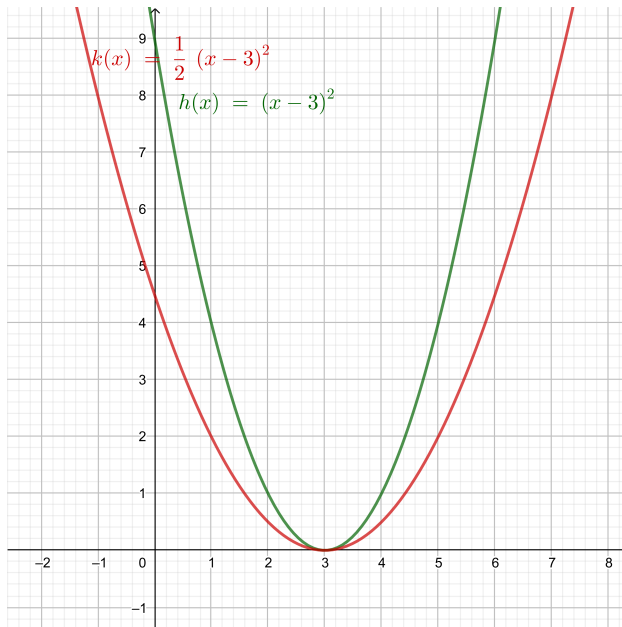
(b) $(x; y) \rightarrow (x+3; y)$



5. Partant de $h(x) = (x-3)^2$, passe à k tel que $k(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2$.

(a) Déformation verticale de coefficient $\frac{1}{2}$ (contraction)

(b) $(x; y) \rightarrow (x; \frac{1}{2}y)$

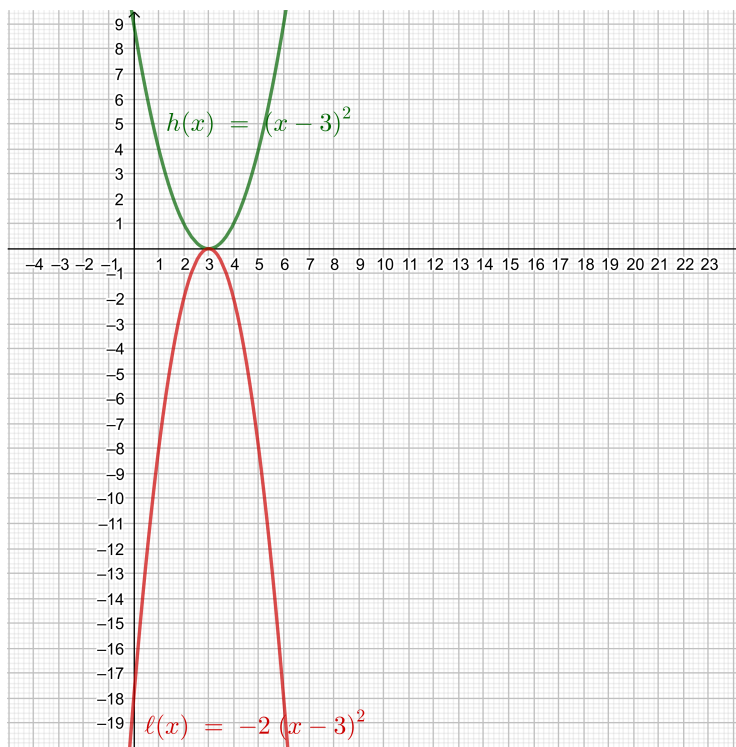


(c)

6. Partant de $h(x) = (x-3)^2$, passe à l tel que $l(x) = -2(x-3)^2$.

(a) Symétrie d'axe horizontal et déformation verticale de coefficient 2 (dilatation)

(b) $(x; y) \rightarrow (x; -2y)$



(c)

Chapitre 3

Deuxième degré

3.0 Prérequis

A retenir

Produits remarquables

Formules	Exemples
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(3 + 2x)^2 = (3)^2 + 2 \cdot (3) \cdot (2x) + (2x)^2 = 9 + 12x + 4x^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(3y - 5)^2 = (3y)^2 - 2 \cdot (3y) \cdot (5) + (5)^2 = 9y^2 - 30y + 25$
$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$	$(4x - 5y) \cdot (4x + 5y) = (4x)^2 - (5y)^2 = 16x^2 - 25y^2$

Factorisation

La factorisation consiste à transformer une somme en un produit de facteurs.

1. La mise en évidence de facteurs communs

Formules

$$ab + ac = a \cdot (b + c)$$

$$ab - ac = a \cdot (b - c)$$

$$ab + ac - ad = a \cdot (b + c - d)$$

Exemples

$$2ax - 5bx = x \cdot (2a - 5b)$$

$$5x^2y^3 - 15xy^4 + 10xy^3 = 5xy^3 \cdot (x - 3y + 2)$$

$$2 \cdot (a - b) \cdot x - 3 \cdot (a - b) \cdot y = (a - b) \cdot (2x - 3y)$$

2. Les produits remarquables

Pour cette deuxième étape, on regarde si on a affaire à une éventuelle **différence de deux carrés** $a^2 - b^2$ ou à un **carré parfait** $a^2 \pm 2ab + b^2$.

On utilise alors les formules des **produits remarquables** à l'envers.

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Exemples

- $x^2 - 9 = (x - 3) \cdot (x + 3)$
- $4a^2 - 9b^2 = (2a - 3b) \cdot (2a + 3b)$
- $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$
- $12x^2 - 3y^2 = 3 \cdot (4x^2 - y^2) = 3 \cdot (2x - y) \cdot (2x + y)$

Il n'existe pas de formule pour une somme de deux carrés. Un tel cas de figure est infactorisable !

Exemple

$x^2 + 4$ est infactorisable car somme de deux carrés.

• Les groupements

Cette troisième technique peut s'avérer utile lorsque l'expression à factoriser est composée de minimum 4 termes, comme ci-dessous.

Exemple

$$\begin{aligned} 3ax - 3ay + x^2 - xy &= (3ax - 3ay) + (x^2 - xy) \\ &= 3a \cdot (x - y) + x \cdot (x - y) \\ &= (x - y) \cdot (3a + x) \end{aligned}$$

• Division du polynôme par $x - a$

Diviser un polynôme $P(x)$ par $x - a$ consiste à l'écrire sous la forme

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R,$$

où R est un nombre (le reste) et $Q(x)$ un polynôme (le quotient).

$(x - a) \cdot Q(x) + R$, ce n'est pas un produit ! Pour factoriser, il faut que $R = 0$.

Loi du reste

$$P(a) = R$$

Conséquence

Si $P(a) = 0$, alors $R = 0$ et $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$.

Le polynôme est donc factorisé dans ce cas.

Il reste à deviner a ... Une méthode qui en vaut une autre consiste à tester les diviseurs du terme indépendant.

Exemple

Factorisation du polynôme $P(x) = 5x^3 - 11x^2 - x + 6$.

Le terme indépendant est 6 et ses diviseurs sont ± 1 , ± 2 et ± 3 .



La valeur de a à deviner est souvent ± 1 , ± 2 ou ± 3 .

$$P(1) = 5.1^3 - 11.1^2 - 1 + 6 = -1. \text{ Le reste n'est pas nul.}$$

Pas de factorisation par $x - 1$.

$$P(-1) = 5.(-1)^3 - 11.(-1)^2 + 1 + 6 = -9. \text{ Le reste n'est pas nul.}$$

Pas de factorisation par $x + 1$.

$$P(2) = 5.2^3 - 11.2^2 - 2 + 6 = 40 - 44 - 2 + 6 = 0.$$

Le reste est nul. Division par $x - 2$.

$$5x^3 - 11x^2 - x + 6 = (x - 2) \cdot Q(x)$$

5	-11	-1	6
2	10	-2	-6
5	-1	-3	0

$$Q(x) = 5x^2 - x - 3$$

$$5x^3 - 11x^2 - x + 6 = (x - 2) \cdot (5x^2 - x - 3)$$

Réponse aux exercices

1. Effectue et réduis les termes semblables.

(a) $(2x + 1) \cdot (3x - 2) = 6x^2 - x - 2$

(b) $(2x - a) \cdot (2a - 3x) = 7ax - 2a^2 - 6x^2$

(c) $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - 2x^2\right) = -2x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$

(d) $3 \cdot \left(\frac{x}{3} - 2\right) - 2 \cdot \left(\frac{x}{2} + 4\right) = -14$

(e) $3 \cdot (x - 2) + 5 \cdot (x + 1) \cdot (2x - 3) = 10x^2 - 2x - 21$

(f) $[2x - (x + 1)] - 2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = -2x^2 - x + 11$

2. Reconnais le (ou les) produits remarquables à utiliser, effectue ensuite la formule et réduis les éventuels termes semblables :

(a) $(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$

(b) $(3x - 4)^2 = 9x^2 - 24x + 16$

(c) $(x - 2) \cdot (x + 2) = x^2 - 4$

$$(d) (3k + 2) \cdot (3k - 2) \cdot (9k^2 + 4) = 81k^4 - 16$$

$$(e) (6a^2x^3 - 3ax)^2 = 36a^4x^6 - 36a^3x^4 + 9a^2x^2$$

$$(f) (-2a + 1)^2 = 4a^2 - 4a + 1$$

$$(g) \left(\frac{a^2}{3} + \frac{2b}{5} \right) \cdot \left(\frac{a^2}{3} - \frac{2b}{5} \right) = \frac{a^4}{9} - \frac{4b^2}{25}$$

$$(h) (-2a^2 - 7x^2)^2 = 4a^4 + 28a^2x^2 + 49x^4$$

$$(i) (-5c + 2a) \cdot (2a + 5c) = 4a^2 - 25c^2$$

$$(j) (2x - 3y) \cdot (3x + 2y) + 2 \cdot (x - y)^2 = 8x^2 - 4y^2 - 9xy$$

$$(k) (5y - 6x) \cdot (5y + 6x) - (-3y + 2x)^2 = -40x^2 + 12xy + 16y^2$$

3. Factorise le plus finement possible les expressions suivantes :

$$(a) 3xy + 3xz = 3x \cdot (y + z)$$

$$(b) 36xy^2 + 9x^2y - 27xy = 9xy \cdot (4y + x - 3)$$

$$(c) 4a^2 - 25b^2 = (2a - 5b) \cdot (2a + 5b)$$

$$(d) (x - 1) \cdot (x + 2) + (x - 1) \cdot (x + 3) = (x - 1) \cdot (2x + 5)$$

$$(e) x^3 - 16x = x \cdot (x - 4) \cdot (x + 4)$$

$$(f) (2x + 3)^2 - 49 = (2x - 4) \cdot (2x + 10) = 4 \cdot (x - 2) \cdot (x + 5)$$

$$(g) x^2 + 9 \text{ in factorisable}$$

$$(h) (7x + 6) \cdot (3x - 5) - (3x - 5) = (3x - 5) \cdot (7x + 5)$$

$$(i) 4x^2 - 28x + 49 = (2x - 7)^2$$

$$(j) (x - 1)^2 - (2x - 3)^2 = (3x - 4) \cdot (-x + 2)$$

$$(k) 12ab - 15b^2 + 24ay - 30by = 3 \cdot (4a - 5b) \cdot (b + 2y)$$

$$(l) 2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = (2x + 5) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$$

$$(m) 5x^4 - 20x^2 = 5x^2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$$

$$(n) x^4 - 16 = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 4)$$

$$(o) x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x + 3)$$

$$(p) 4 \cdot (x - 1) - 3 \cdot (x - 1)^2 = (x - 1) \cdot (7 - 3x)$$

$$(q) 3a \cdot (x - 4) - 2b \cdot (4 - x) = (x - 4) \cdot (3a + 2b)$$

$$(r) x^2 \cdot (a - b) + 4 \cdot (b - a) = (a - b) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$$

$$(s) 4x^3 - 12x^2 + 9x = x \cdot (2x - 3)^2$$

$$(t) (2x - 7) \cdot (x + 4) - (4x + 1) \cdot (4 + x) = -2 \cdot (x + 4)^2$$

$$(u) 3x^2 + 5x + 2 = (x + 1) \cdot (3x + 2)$$

$$(v) 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 = (x + 1) \cdot (x + 3) \cdot (2x - 1)$$

$$(w) \quad 2x^3 - 8x^5 - 1 + 4x^2 = (2x^3 - 1) \cdot (1 - 2x) \cdot (1 + 2x)$$

$$(x) \quad 2x^4 - 10x^3 + 16x^2 - 8x = 2x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)^2$$

$$(y) \quad x^3 - 19x + 30 = (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x + 5)$$

$$(z) \quad 2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9 = (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 3) (2x + 1)$$

3.1 Fonction du deuxième degré

A retenir

Définition

- La fonction f est du deuxième degré si $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Théorème

$$\bullet \quad f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + v$$

$$\text{où } v = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

Exemple

$f(x) = 2x^2 + 20x + 35$	
$f(x) = 2\left(x^2 + 10x + \frac{35}{2}\right)$	Mise en évidence de a
$f(x) = 2\left[x^2 + 10x + 25 - 25 + \frac{35}{2}\right]$	Compléter le carré et compenser cet ajout
$f(x) = 2\left[(x + 5)^2 - 25 + \frac{35}{2}\right]$	Former le carré parfait
$f(x) = 2\left[(x + 5)^2 - \frac{15}{2}\right]$	Réduction des deux derniers termes au même dénominateur
$f(x) = 2(x + 5)^2 - 15$	Redistribution de a

Nous voyons donc que toute fonction du deuxième degré peut être construite en partant de la fonction de référence $y = x^2$ via les 3,5 transformations suivantes :

- une translation horizontale de $-\frac{b}{2a}$ unités,

2. une déformation verticale de coefficient $|a|$ (avec symétrie d'axe Ox si $a < 0$),

3. une translation verticale de $v = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ unités.

Un point $(x; y)$ de la parabole $y = ax^2$ sera donc transformé en $\left(x - \frac{b}{2a}; ay + \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

En notant $\rho = b^2 - 4ac$,

un point $(x; y)$ de la parabole $y = x^2$ sera donc transformé en $\left(x - \frac{b}{2a}; ay - \frac{\rho}{4a}\right)$.

Conséquences importantes pour la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

1. L'axe de la fonction a comme équation $x = -\frac{b}{2a}$.
2. Le sommet de la parabole a comme coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\rho}{4a}\right)$.
3. A la deuxième étape (déformation verticale de coefficient $|a|$), si $a > 0$ la parabole reste « souriante » et si $a < 0$ la parabole devient « triste ».

Étude et représentation graphique d'une fonction du second degré

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

1. Équation de l'axe de symétrie $x = -\frac{b}{2a}$

2. Coordonnées du sommet $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\rho}{4a}\right)$

3. Variation

(a) Si $a > 0$

x		$-\frac{b}{2a}$	
$ax^2 + bx + c$	$\searrow$	m	$\nearrow$

la parabole est « souriante »

(b) Si $a < 0$

x		$-\frac{b}{2a}$	
$ax^2 + bx + c$	$\nearrow$	M	$\searrow$

la parabole est « triste ».

Méthode

1. Calculer $-\frac{b}{2a}$, ce qui donnera une équation de l'axe de symétrie et la première coordonnée du sommet.
2. Déterminer le tableau de variation (avec le signe de a).
3. Chercher des points (symétriques) de part et d'autre du sommet.
4. Tracer le graphique.

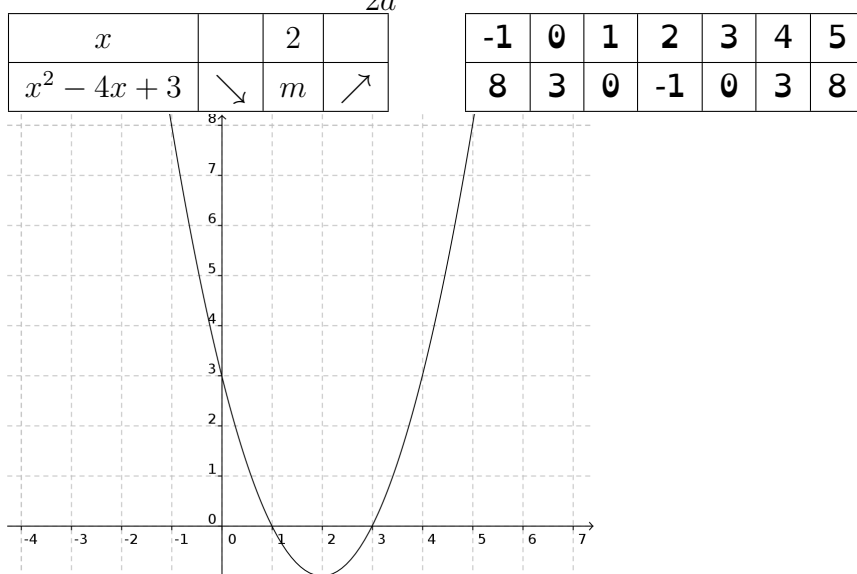


En un mot, calculer $-\frac{b}{2a}$, chercher des points symétriques et c'est (presque) fait !
Je vérifie aussi la point $(0; c)$.

Réponse aux exercices

Étudie et représentez la fonction f .

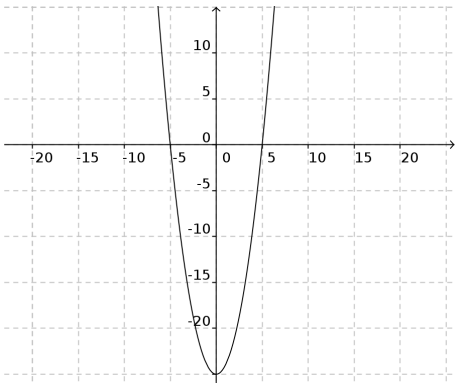
1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ $-\frac{b}{2a} = 2$ $\rho = 4$ $Axe \equiv x = 2$ **Sommet**(2; -1)



2. $f(x) = x^2 - 25$ $-\frac{b}{2a} = 0$ $\rho = 100$ $Axe \equiv x = 0$ **Sommet**(0; -25)

x		0					
$x^2 - 25$	$\searrow$	m	$\nearrow$				

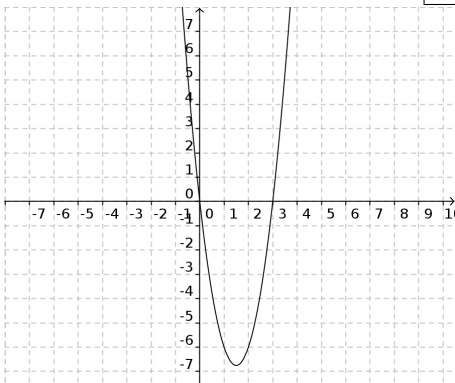
-5	-3	-1	0	1	3	5
0	-16	-24	-25	-24	-16	0



3. $f(x) = 3x^2 - 9x$ $-\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$ $\rho = 81$ $Axe \equiv x = \frac{3}{2}$ Sommet $\left(\frac{3}{2}; -\frac{27}{4}\right)$

x		$\frac{3}{2}$	
$3x^2 - 9x$	$\searrow$	m	$\nearrow$

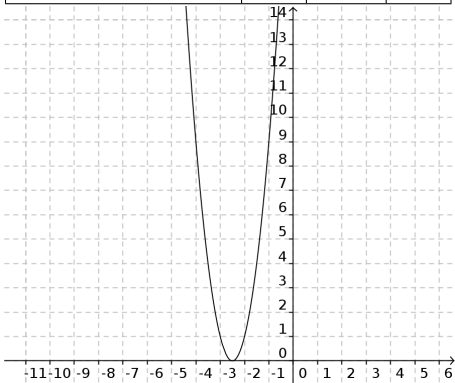
-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4
12	-9	-6	$-\frac{27}{4}$	-6	-9	12



4. $f(x) = 4x^2 + 20x + 25$ $-\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2}$ $\rho = 0$ $Axe \equiv x = -\frac{5}{2}$ Sommet $\left(-\frac{5}{2}; 0\right)$

x		$-\frac{5}{2}$	
$4x^2 + 20x + 25$	$\searrow$	m	$\nearrow$

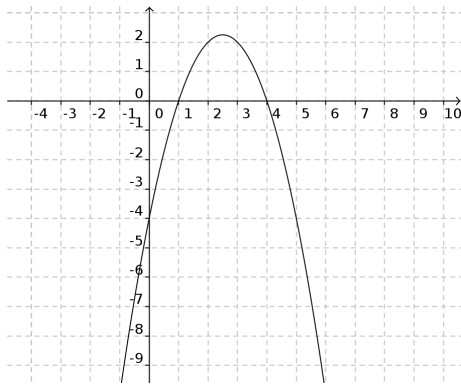
-5	-4	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	-1	0
25	9	1	0	1	9	25



5. $f(x) = -x^2 + 5x - 4$ $-\frac{b}{2a} = \frac{5}{2}$ $\rho = 9$ $Axe \equiv x = \frac{5}{2}$ Sommet $\left(\frac{5}{2}; \frac{9}{4}\right)$

x		$\frac{5}{2}$	
$3x^2 - 9x$	$\nearrow$	M	$\searrow$

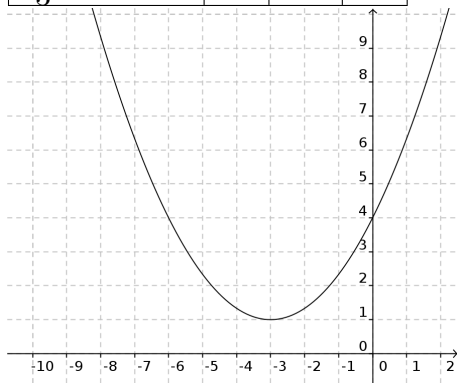
0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5
-4	0	2	$\frac{9}{4}$	2	0	-4



6. $f(x) = \frac{x^2}{3} + 2x + 4$ $-\frac{b}{2a} = -3$ $\rho = -\frac{4}{3}$ $Axe \equiv x = -3$ Sommet $(-3; 1)$

x		-3	
$\frac{x^2}{3} + 2x + 4$	$\searrow$	m	$\nearrow$

-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
4	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	4



3.2 Fonction du deuxième degré, le retour

A retenir

Si $f(x)$ est donné

1. Calcule $-\frac{b}{2a}$, ce qui donnera l'axe de symétrie.
2. Détermine la variation (avec le signe de a).
3. Cherche le point $(0;)$.
4. Trouve le graphique.

Réponse aux exercices

1. Associe à chaque fonction du second degré le graphique qui lui convient

$f(x)$	signe de a	$-\frac{b}{2a}$	$(0; c)$	Graphique
(a)	-	1	$(0; 2)$	E
(b)	+	2	$(0; 0)$	H
(c)	+	3	$(0; 3)$	D
(d)	-	$\frac{3}{2}$	$(0; -3)$	G
(e)	+	-3	$(0; -2)$	B
(f)	-	-1	$(0; -2)$	A
(g)	+	-2	$(0; -1)$	F
(h)	-	$\frac{1}{4}$	$(0; 1)$	C

2. (Ex 22) On considère la parabole obtenue comme le graphe de la fonction f définie par $f(x) = 36x - 2x^2 - 34$.

Le sommet est-il un point maximum ou minimum ? Son ordonnée est-elle positive ou négative ?

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 36 \\ c = -34 \end{cases} \quad \text{Le sommet est un point maximum d'abscisse } -\frac{b}{2a} = 9.$$

Son ordonnée est $-2.81 + 36.9 - 34 = -162 + 324 - 34$.

Réponse : Le sommet est un point maximum et son ordonnée est positive.

3. $f(x) = x^2 + bx + c$

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

(b) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

Détails et graphiques :



<http://tetramath.jean-luc-goffin.be/degre2>

4. $f(x) = ax^2 - x + c$

(c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 3$

(d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}$

$$(e) f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$$

Détails et graphiques :



<http://tetramath.jean-luc-goffin.be/degre2>

5. $f(x) = ax^2 + bx + 3$

$$(f) f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

$$(g) f(x) = 2x^2 + 4x + 3$$

Détails et graphiques :



<http://tetramath.jean-luc-goffin.be/degre2>

6. Le ballon

$$f(x) = -475x^2 + 418x + 84$$

Détails et graphiques :



<http://tetramath.jean-luc-goffin.be/degre2>

7. Détermine f(x)

(a) Vu le point $(0; 2)$, $c = 2$.

$$f(x) = ax^2 + bx + 2$$

$$-\frac{b}{2a} = 2 \quad b = -4a \quad f(x) = ax^2 - 4ax + 2$$

$$f(2) = -6 \quad f(2) = a \cdot 4 - 4a \cdot 2 + 2 = -6 \quad -4a = -8$$

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 2$$

(b) Vu le point $(0; 2)$, $c = 2$.

$$f(x) = ax^2 + bx + 2$$

$$-\frac{b}{2a} = 1 \quad b = -2a \quad f(x) = ax^2 - 2ax + 2$$

$$f(1) = 3 \quad f(1) = a - 2a + 2 = 3 \quad -a = 1$$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 2$$

(c) Vu le point $(0; 1)$, $c = 1$.

$$f(x) = ax^2 + bx + 1$$

$$-\frac{b}{2a} = 2 \quad b = -4a \quad f(x) = ax^2 - 4ax + 1$$

$$f(2) = -1 \quad f(2) = 4a - 8a + 1 = -1 \quad -4a = -2$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

(d) Vu le point $(0; 3)$, $c = 3$.

$$f(x) = ax^2 + bx + 3$$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \quad b = -a \quad f(x) = ax^2 - ax + 3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}a + 3 = \frac{7}{2} \quad -\frac{1}{4}a = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = -2x^2 + 2x + 3$$

3.3 Équations et inéquations

A retenir

Définition

Une équation du deuxième degré a la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Avec $f(x) = ax^2 + bx + c$, cela revient à $f(x) = 0$.

Propriété

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède 0, 1 ou 2 solutions suivant le signe de $\rho = b^2 - 4ac$.

Si $b^2 - 4ac < 0$	Si $b^2 - 4ac = 0$	Si $b^2 - 4ac > 0$
	$x = -\frac{b}{2a}$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Il n'y a pas de racine.	Il y a une racine.	Il y a deux racines.

Il suffit donc de calculer $b^2 - 4ac$ pour séparer les trois cas.

On dit que $b^2 - 4ac$ est le discriminant ou le réalisant.

Notation : $\rho = b^2 - 4ac$.

Propriétés (rappels)

1. Le carré d'un nombre est toujours positif.
2. Un produit est nul si et seulement si un des facteurs au moins est nul.
C'est la règle du produit nul.

$$A.B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Définition

Une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ est incomplète ssi $b = 0$ ou $c = 0$.

Exemples de résolution

$$1. 3x^2 + 5x = 0$$

$$x.(3x + 5) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } (3x + 5) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = -\frac{5}{3}$$

$$2. x^2 - 4 = 0$$

$$(x - 2).(x + 2) = 0$$

$$(x - 2) = 0 \text{ ou } (x + 2) = 0$$

$$x = 2 \text{ ou } x = -2$$

$$3. 4x^2 + 9 = 0$$

$$4x^2 = -9$$

$$x^2 = -\frac{9}{4}$$

Pas de solution

$$4. 4x^2 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$5. (x - 2)^2 = 9$$

$$(x - 2) = \pm 3$$

$$x - 2 = 3 \text{ ou } x - 2 = -3$$

$$x = 5 \text{ ou } x - 2 = -1$$

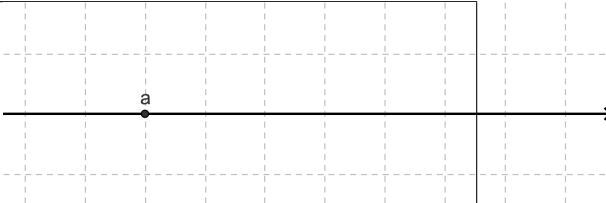
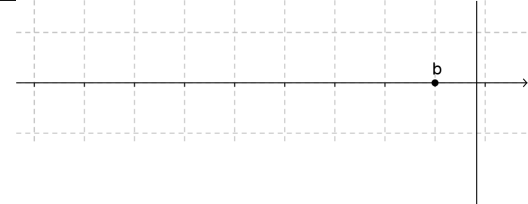
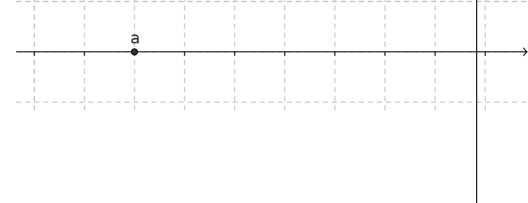
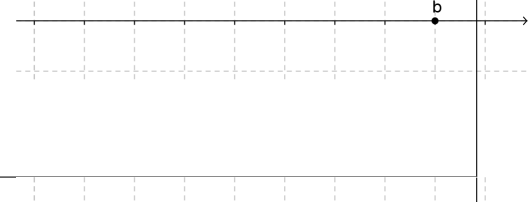
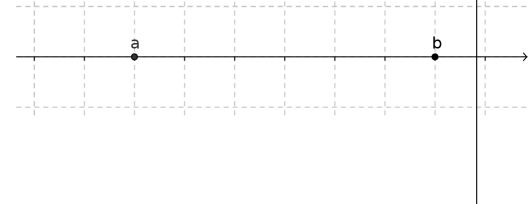
Définition

Un trinôme du second degré est un polynôme du type $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Propriété

Le signe du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$
($a \neq 0$)
est toujours le signe de a sauf entre les racines.

Ensembles liés aux inéquations et systèmes d'inéquations

Inéquation	Ensemble	Notation	Interprétation géométrique
$x > a$	Ensemble des nombres réels strictement plus grands que a	$]a; +\infty[$	
$x < b$	Ensemble des nombres réels strictement plus petits que b	$] -\infty; b[$	
$x \geq a$	Ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à a	$[a; +\infty[$	
$x \leq b$	Ensemble des nombres réels inférieurs ou égaux à b	$] -\infty; b]$	
$x > a$ et $x < b$ noté $a < x < b$	Ensemble des nombres réels strictement plus grands que a et strictement plus petits que b	$]a; b[$	
$x \geq a$ et $x \leq b$ noté $a \leq x \leq b$	Ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à a et inférieurs ou égaux à b	$[a; b]$	

Définitions

Ces ensembles sont des intervalles.

$[a; b]$ est un intervalle fermé et $]a; b[$ est un intervalle ouvert.

$]a; b]$ est un intervalle semi-ouvert (ou semi-fermé).

Réponse aux exercices

1. Résous les équations suivantes

(a) $x^2 + 5x + 6 = 0$ $S = \{-3; -2\}$

(b) $x^2 - 6x + 8 = 0$ $S = \{2; 4\}$

(c) $x^2 + x - 1 = 0$ $S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$

(d) $9x^2 + 24x + 16 = 0$ $S = \left\{ -\frac{4}{3} \right\}$

(e) $2x^2 + 3x + 4 = 0$ **Pas de solution**

(f) $4x^2 = 16x$ $S = \{0; 4\}$

(g) $18x^2 + 3x - 1 = 0$ $S = \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{6} \right\}$

(h) $x^2 - 5 = 0$ $S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$

(i) $-x^2 + 2x + 5 = 0$ $S = \{1 - \sqrt{6}; 1 + \sqrt{6}\}$

(j) $x^2 + \frac{x}{4} - \frac{3}{8} = 0$ $S = \left\{ -\frac{3}{4}; \frac{1}{2} \right\}$

(k) $-x^2 - 0,3x + 0,4 = 0$ $S = \left\{ -\frac{4}{5}; \frac{1}{2} \right\}$

(l) $x^2 = x$ $S = \{0; 1\}$

(m) $-x^2 - 25 = 0$ **Pas de solution**

(n) $x + 6x^2 = 1$ $S = \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{3} \right\}$

(o) $36x + 12 = 6x^2 - 6$ $S = \{3 - 2\sqrt{3}; 3 + 2\sqrt{3}\}$

(p) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$ $S = \{\sqrt{2}\}$

2. (Ex 25) Résoudre l'équation $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$

Le second membre étant positif, il faut $x \geq 0$.

Parmi les propositions, une seule ne contient que des (en l'occurrence un) nombres positifs.

Vérifions : $x^2 = 1 + \sqrt{1+x} \iff x^2 - 1 = \sqrt{1+x}$. Il faut $x \geq 1$.

$$(x^2 - 1)^2 = 1 + x \iff x^4 - 2x^2 + 1 = 1 + x \iff x^4 - 2x^2 - x = 0$$

$$x(x^3 - 2x - 1) = 0 \iff x(x+1)(x^2 - x - 1) = 0.$$

0 et -1 étant exclus, il reste $b^2 - 4ac = 5$ $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ étant exclu, il reste $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

1. Résous les équations suivantes

(a) $5x^2 + 1 = 0$ Pas de solution

(b) $x^2 = 81$ $S = \{-9; 9\}$

(c) $7x^2 = 3x$ $S = \left\{0; \frac{3}{7}\right\}$

(d) $4x^2 - 3 = 0$ $S = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

(e) $12x^2 - 27 = 0$ $S = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$

(f) $7x^2 + 9x = 0$ $S = \left\{-\frac{9}{7}; 0\right\}$

(g) $121 - 49x^2 = 0$ $S = \left\{-\frac{11}{7}; \frac{11}{7}\right\}$

(h) $(x+3)^2 = 5$ $S = \{-3 - \sqrt{5}; -3 + \sqrt{5}\}$

(i) $(x-2)^2 = 9(x-2)$ $S = \{2; 11\}$

(j) $x^2 - 10 = 0$ $S = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$

(k) $(x-9)^2 + 1 = 0$ Pas de solution

(l) $(4x-7)^2 = 0$ $S = \left\{\frac{7}{4}\right\}$

2. Les 6 cas.

Nombre de racines	signe de a	signe de f(x)					
0	-	-					
1	+	+	0	+			
2	+	+	0	-	0	+	
0	+	+					
1	-	-	0	-			
2	-	-	0	+	0	-	

3. Dresse le tableau de signe de

$$(a) \quad x^2 - 6x + 8 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 8 \end{cases}$$

$$\rho = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 8 = 4 \quad \text{2 racines : } \frac{6 \pm 2}{2} = < \frac{4}{2}$$

x		2		4	
$x^2 - 6x + 8$	+	0	-	0	+

$$(b) \quad x^2 + x - 1 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\rho = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot (-1) = 5 \quad \text{2 racines : } \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

x		$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$	
$x^2 + x - 1$	+	0	-	0	+

$$(c) \quad 9x^2 + 24x + 16 \quad \begin{cases} a = 9 \\ b = 24 \\ c = 16 \end{cases}$$

$$\rho = b^2 - 4ac = 24^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16 = 0 \quad \text{1 racine : } \frac{-24}{18} = -\frac{4}{3}$$

x		$-\frac{4}{3}$			
$9x^2 + 24x + 16$	+	0		+	

$$(d) \quad 4x^2 - 16x$$

$$4x(x - 4) = 0 \quad \text{ssi } x = 0 \text{ ou } x = 4$$

x		0		4	
$4x^2 - 16x$	+	0	-	0	+

$$(e) \quad 18x^2 + 3x - 1 \quad \begin{cases} a = 18 \\ b = 3 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\rho = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot (-18) = 81 \quad \text{2 racines : } \frac{-3 \pm 9}{36} = < \frac{1}{6}$$

x		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$	
$18x^2 + 3x - 1$	+	0	-	0	+

(f) $x^2 - 5$

$x^2 - 5 = 0$ ssi $x^2 = 5$ ssi $x = \pm\sqrt{5}$

x		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	
$x^2 - 5$	+	0	-	0	+

(g) $-x^2 + 2x + 5$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 5 \end{cases}$

$\rho = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot (-5) = 21$ 2 racines : $\frac{-2 \pm \sqrt{21}}{-2} = < \frac{2+\sqrt{21}}{2}$
 $\frac{2-\sqrt{21}}{2}$

x		$\frac{2-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{2+\sqrt{21}}{2}$	
$-x^2 + 2x + 5$	-	0	+	0	-

(h) $x^2 + \frac{x}{4} - \frac{3}{8}$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{4} \\ c = -\frac{3}{8} \end{cases}$

$\rho = b^2 - 4ac = \frac{1}{16} - 4 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{25}{16}$ 2 racines : $\frac{-\frac{1}{4} \pm \frac{5}{4}}{2} = < -\frac{3}{4}$
 $\frac{1}{2}$

x		$-\frac{3}{4}$		$\frac{1}{2}$	
$x^2 + \frac{x}{4} - \frac{3}{8}$	+	0	-	0	+

(i) $x^2 - x$

$x^2 - x = 0$ ssi $x(x-1) = 0$ ssi $x = 0$ ou $x = 1$

x		0		1	
$x^2 - x$	+	0	-	0	+

(j) $-x^2 - 25$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = -25 \end{cases}$

$-x^2 - 25 = 0$ ssi $x^2 = -25$ pas de racine

x		
$-x^2 - 25$	-	

(k) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2\sqrt{2} \\ c = 2 \end{cases}$

$$\rho = b^2 - 4ac = 8 - 4 \cdot 2 = 0 \quad \text{1 racine : } \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

x		$\sqrt{2}$	
$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$	+	0	+

$$(l) \quad -x^2 + 6x - 9 \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -9 \end{cases}$$

$$\rho = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 9 = 0 \quad \text{1 racine : } \frac{-6}{-2} = 3$$

x		3	
$-x^2 + 6x - 9$	-	0	-

$$(m) \quad x^2 + x + 8 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 8 \end{cases}$$

$$\rho = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 8 = -31 \quad \text{pas de racine}$$

x	
$x^2 + x + 8$	+

4. Étudie et représente la fonction f (y compris le signe les intersections avec les axes).

$$(a) \quad f(x) = -x^2 + 6x - 10$$

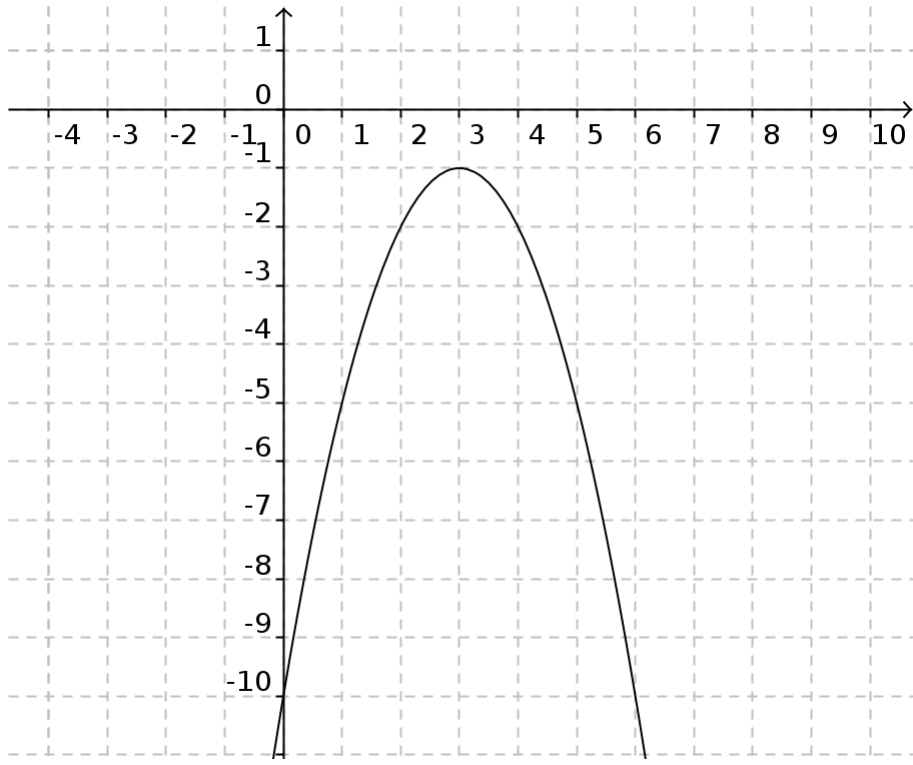
$$-\frac{b}{2a} = 3 \quad \rho = -4 \quad \text{Axe} \equiv x = 3 \quad \text{Sommet}(3; -1)$$

x		3	
$-x^2 + 6x - 10$	$\nearrow$	M	$\searrow$

x	
$-x^2 + 6x - 10$	-

0	1	2	3	4	5	6
-10	-5	-2	-1	-2	-5	-10

$$f \cap Ox : / \quad f \cap Oy : (0; -10)$$



3

(b) $f(x) = -4x^2 + 9$

$-\frac{b}{2a} = 0 \quad \rho = 144 \quad Axe \equiv x = 0 \quad \text{Sommet}(0; 9)$

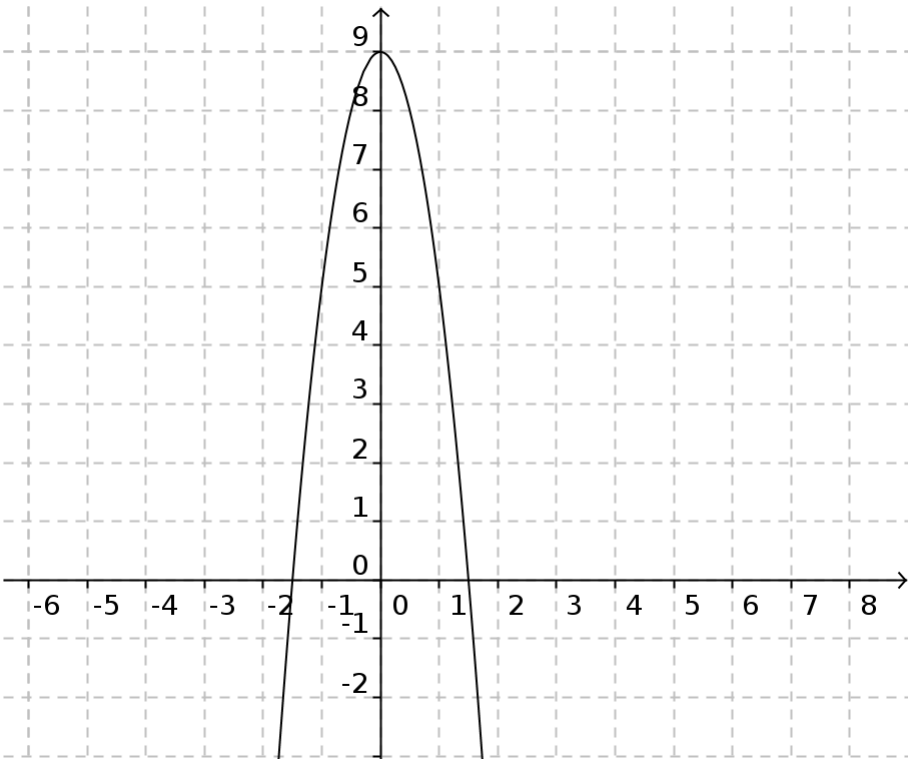
x		0	
$-4x^2 + 9$	$\nearrow$	M	$\searrow$

x		$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	
$-4x^2 + 9$	$-$	0	$+$	0	$-$

-3	-2	-1	0	1	2	3
-27	-7	5	9	5	-7	-27

$f \cap Ox : \left(-\frac{3}{2}; 0\right) \text{ et } \left(\frac{3}{2}; 0\right) \quad f \cap Oy : (0; 9)$

3



(c) $f(x) = -4x^2 + 4x + 3$

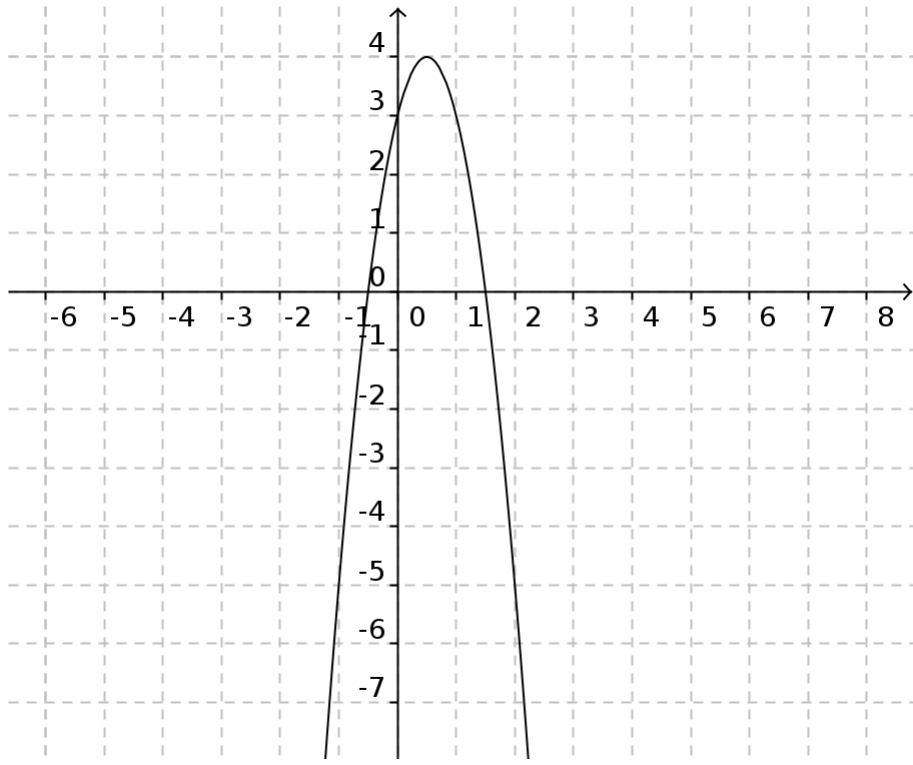
$-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \quad \rho = 64 \quad Axe \equiv x = \frac{1}{2} \quad \text{Sommet} \left(\frac{1}{2}; 4 \right)$

x		$\frac{1}{2}$	
$-4x^2 + 4x + 3$	$\nearrow$	M	$\searrow$

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	
$-4x^2 + 4x + 3$	$-$	0	$+$	0	$-$

-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
-21	-5	3	4	3	-5	-21

$f \cap Ox : \left(-\frac{1}{2}; 0 \right) \text{ et } \left(\frac{3}{2}; 0 \right) \quad f \cap Oy : (0; 3)$



3

(d) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$

$-\frac{b}{2a} = \frac{5}{4} \quad \rho = 17 \quad Axe \equiv x = \frac{5}{4} \quad \text{Sommet} \left(\frac{5}{4}; -\frac{17}{8} \right)$

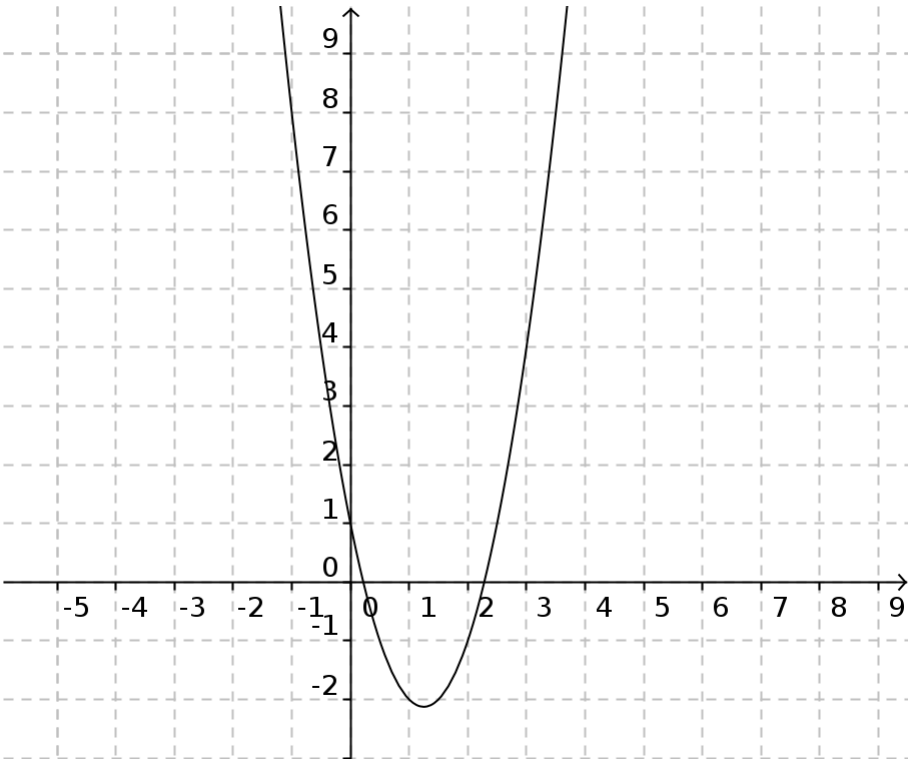
x		$\frac{5}{4}$	
$2x^2 - 5x + 1$	$\searrow$	m	$\nearrow$

x		$\frac{5 - \sqrt{17}}{4}$		$\frac{5 + \sqrt{17}}{4}$	
$2x^2 - 5x + 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

-2	-1	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$
19	8	1	$-\frac{17}{8}$	1	8	19

$f \cap Ox : \left(\frac{5 - \sqrt{17}}{4}; 0 \right) \text{ et } \left(\frac{5 + \sqrt{17}}{4}; 0 \right) \quad f \cap Oy : (0; 1)$

3



(e) $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$

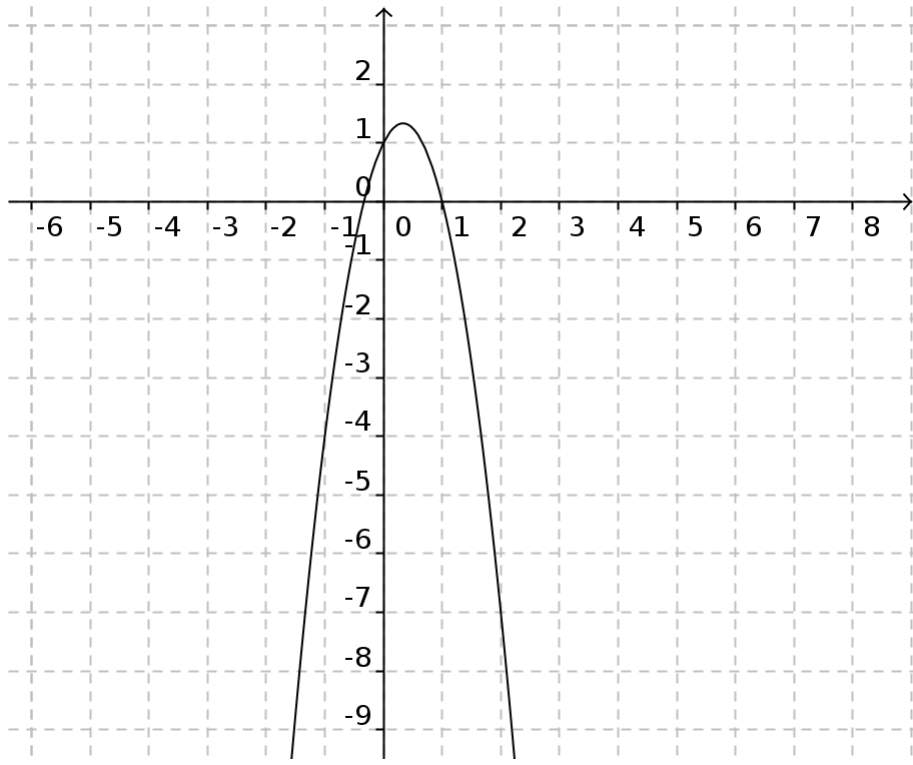
$-\frac{b}{2a} = \frac{1}{3} \quad \rho = 16 \quad Axe \equiv x = \frac{1}{3} \quad \text{Sommet} \left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3} \right)$

x		$\frac{1}{3}$	
$-3x^2 + 2x + 1$	$\nearrow$	M	$\searrow$

x		$-\frac{1}{3}$		1	
$-4x^2 + 4x + 3$	$-$	0	$+$	0	$-$

-2	-1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{11}{3}$
-15	-4	1	$\frac{4}{3}$	1	-4	-15

$f \cap Ox : \left(\frac{-1}{3}; 0 \right) \text{ et } (1; 0) \quad f \cap Oy : (0; 1)$



(f) $f(x) = \frac{3x^2}{2} + 3x + \frac{1}{2}$

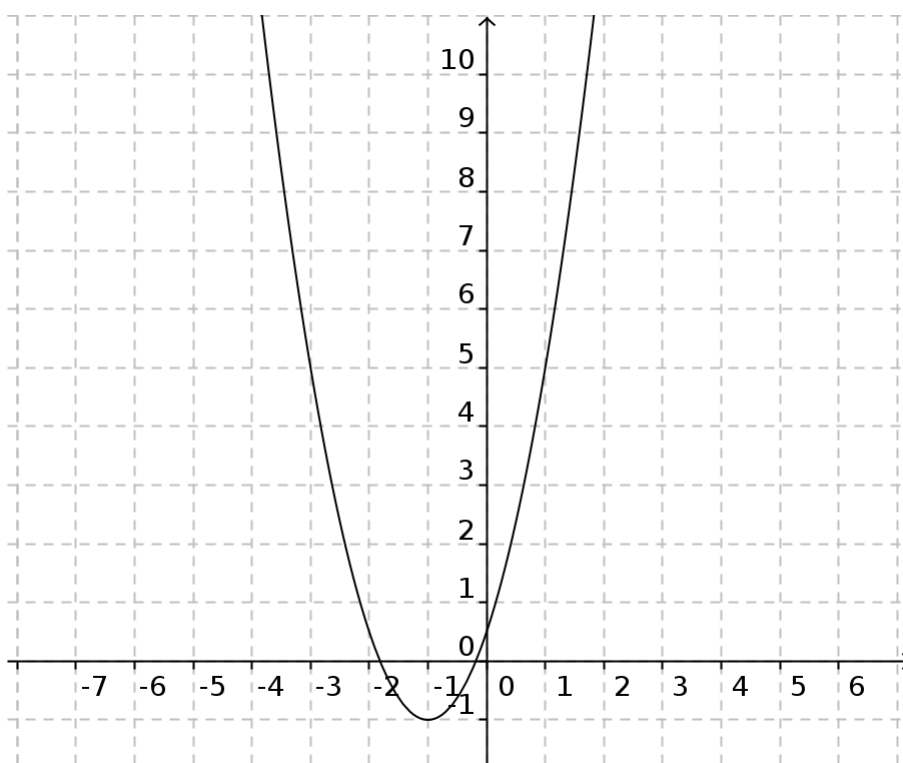
$-\frac{b}{2a} = -1 \quad \rho = 6 \quad Axe \equiv x = -1 \quad \text{Sommet}(-1; -1)$

x		-1	
$\frac{3x^2}{2} + 3x + \frac{1}{2}$	$\searrow$	m	$\nearrow$

x		$\frac{-3 - \sqrt{6}}{3}$		$\frac{-3 + \sqrt{6}}{3}$	
$2x^2 - 5x + 1$	+	0	-	0	+

-4	-3	-2	-1	0	1	2
$\frac{25}{2}$	5	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	5	$\frac{25}{2}$

$f \cap Ox : \left(\frac{-3 - \sqrt{6}}{3}; 0 \right) \text{ et } \left(\frac{-3 + \sqrt{6}}{3}; 0 \right) \quad f \cap Oy : \left(0; \frac{1}{2} \right)$



5. (Ex 21) On considère l'ensemble A des nombres réels a pour lesquels l'expression

$a^2 - 9 - a - 3$ est strictement positive. Quel est l'ensemble A ?

$a^2 - 9 - a - 3 = a^2 - a - 12$ Même si la variable est a, j'appelle les coefficients a, b, c.

$b^2 - 4ac = 49$ il y a donc 2 racines $\frac{1 \pm 7}{2} = \begin{matrix} 4 \\ -3 \end{matrix}$

a		-3		4	
$a^2 - a - 12$	+	0	-	0	+

La réponse est $]-\infty; -3[\cup]4; +\infty[$.

6. Complète le tableau

	Intervalle	Inégalité(s)	Signification
1)	$] -1; 5[$	$-1 < x < 5$	Ensemble des réels supérieurs à -1 et inférieurs à 5
2)	$[-8; 11[$	$-8 \leq x < 11$	Ensemble des réels supérieurs ou égaux à -8 et inférieurs à 11
3)	$] -\infty; -5[$	$x < -5$	Ensemble des réels inférieurs à -5
4)	$] -1; 8]$	$-1 < x \leq 8$	Ensemble des réels supérieurs à -1 et inférieurs ou égaux à 8
5)	$[-1; 3]$	$-1 \leq x \leq 3$	Ensemble des réels supérieurs ou égaux à -1 et inférieurs ou égaux à 3
6)	$] -\infty; -1[\cup [6; +\infty[$	$x < -1$ ou $x \geq 6$	Ensemble des réels inférieurs à -1 ou supérieurs ou égaux à 6
7)	$] -2; +\infty[$	$x > -2$	Ensemble des réels supérieurs à -2
8)	$] -\infty; 7[$	$x < 7$	Ensemble des réels inférieurs à 7

7. Résous les inéquations

(a) $S = [-4; 3]$

(b) $S = \left[-\frac{7}{5}; \frac{7}{5}\right]$

(c) $S = \emptyset$

(d) $-2x^2 + 2x + 4 \leq 0$

$S =]\leftarrow; -1] \cup [2; \rightarrow[$

(e) $-2x^2 - 3x + 9 > 0$

$S = \left]-3; \frac{3}{2}\right[$

(f) $2x^2 - 8 \geq 0$

$S =]\leftarrow; -2] \cup [2; \rightarrow[$

(g) $-2x^2 + 4x > 0$

$S =]0; 2[$

(h) $-x^2 + 2x - 1 < 0$

$S = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

3.4 Factorisation du trinôme

A retenir

Somme et produit des solutions de l'équation du second degré

Remarque préliminaire

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet des solutions quand $\rho \geq 0$.

La formule $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\rho}}{2a}$ valable quand $\rho > 0$, est aussi valable quand $\rho = 0$:

on retrouve alors $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Quand $\rho = 0$, on dit que l'équation admet deux solutions identiques : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Propriété (théorème de Viète)

Quand $\rho \geq 0$, les deux solutions x_1 et x_2 de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ on pour

- somme $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- produit $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Factorisation

Synthèse

Factorisation de $ax^2 + bx + c$	↗	$\rho > 0$	$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$	où $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\rho}}{2a}$
	→	$\rho = 0$	$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1)^2$	où $x_1 = -\frac{b}{2a}$
	↘	$\rho < 0$	$ax^2 + bx + c$ est infactorisable.	

Réponse aux exercices

1. Factoriser, sans oublier la mise en évidence et les produits remarquables.

(a) $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

(b) $6x^2 + 5x - 6 = 6 \left(x + \frac{3}{2}\right) \left(x - \frac{2}{3}\right) = (2x + 3)(3x - 2)$

(c) $8x^3 + 6x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(8x^2 - 2x - 3) = (x + 1) \cdot 8 \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) = (x + 1)(4x - 3)(2x + 1)$

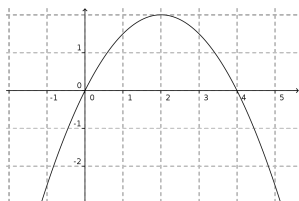
$$(d) \quad x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

$$(e) \quad 2x^2 - 4x = x(x - 2)(x + 2)$$

$$(f) \quad 4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$$

$$(g) \quad 10x^3 - 3x^2 - 16x - 3 = (x + 1)(10x^2 - 13x - 3) = (x + 1) \cdot 10 \cdot \left(x + \frac{1}{5}\right) \left(x - \frac{3}{2}\right) = (x + 1)(5x + 1)(2x - 3)$$

2. (Ex 21) Considérons la parabole dont une portion est représentée ci-dessous.



Quelles sont les coordonnées du point d'abscisse 10 sur cette parabole ?

Il s'agit d'une fonction du second degré à 2 racines, donc $y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

où $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ et $a < 0$. $y = a \cdot (x) \cdot (x - 4)$ et comme l'image de 2 est 2,

$$2 = a \cdot (2) \cdot (2 - 4) \text{ d'où } a = -\frac{1}{2}. \text{ L'image de 10 est } y = -\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10 - 4)$$

et la réponse est $(10; -30)$.

3. (Ex 22) Considérons l'équation suivante en x :

$$(ax)^3 - (ax)^2 + ax = 0$$

Pour quelle(s) valeur(s) réelle(s) de a existe-t-il des solutions autres que $x = 0$ pour cette équation ?

$$(ax)^3 - (ax)^2 + ax = 0 \iff (ax) \left((ax)^2 - ax + 1 \right) = 0$$

Si $a = 0$, n'importe quel x est solution.

Le second facteur pourrait donner des solutions autres que $x=0$: $(ax)^2 - ax + 1 = 0$

$$a^2x^2 - ax + 1 = 0 \quad b^2 - 4ac = a^2 - 4a^2 = -3a^2$$

$$b^2 - 4ac < 0 \text{ sauf si } a = 0.$$

Réponse : uniquement $a = 0$

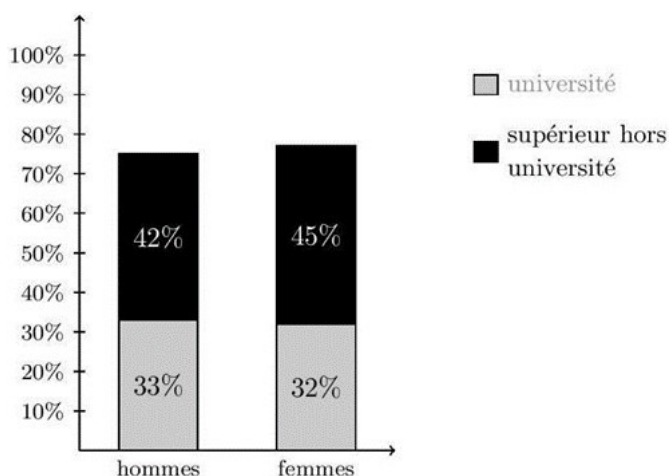
Chapitre 4

Statistique

4.1 Prérequis

1.	La moyenne de 3, 5, 10 et -6 est	3
	La moyenne de 0, 2, 7 et -9 est	0
	La moyenne de 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 7, 7 et 7 est	5
	Le calcul $\frac{3.3 + 7.5 + 8.8}{18}$ donne	6

2. (Ex 23) Voici un graphique représentant le taux d'accès à l'enseignement supérieur des hommes et des femmes ayant obtenu un diplôme de secondaire.



Supposons que parmi les personnes ayant obtenu leur diplôme de secondaire, 60 % sont des femmes et 40 % des hommes.

Que vaut le taux d'accès (en %) à l'enseignement supérieur hors université parmi les personnes ayant obtenu un diplôme de secondaire ?

$$0,4 \cdot 42 + 0,6 \cdot 45 = 16,8 + 27 \text{ Réponse : } 43,8 \%$$

4.2 Tableau brut - tableau ordonné

A retenir

Définitions

- La statistique est la science qui a pour objet les ensembles étendus de mesures de même nature.
- La population est l'ensemble des éléments auxquels se rapporte la mesure.
- L'échantillon est l'ensemble des éléments dont on connaît la mesure.
- Un individu est un élément de la population.
- Le caractère est l'aspect de la population que l'on étudie, que l'on mesure.
- Un caractère est quantitatif lorsque ses modalités s'expriment par des nombres qui peuvent être ordonnés.
- Un caractère est qualitatif lorsqu'il n'est pas quantitatif.
- Les modalités d'un caractère sont les différentes valeurs que prend le caractère.
- L'effectif n_i d'une modalité (ou d'une classe de modalités) est le nombre d'individus ayant cette modalité (ou dont la modalité appartient à cette classe).

Exemples de caractère quantitatif

Cote d'interrogation, âge, taille, masse, nombre de buts marqués, diamètre des clous, nombre d'enfants d'une famille, distance entre le domicile et l'école, ...

Exemples de caractère qualitatif

Nationalité (belge, marocain, italien, ...), couleur des yeux (bleu, vert, brun, ...), marque de voiture (Audi, Peugeot, Toyota, ...), niveau de satisfaction des clients pour un produit (médiocre, passable, bien, ...), type de délit (mineur, assez grave, grave, ...), ...

- Lorsque le nombre de modalités est largement supérieur à 10, on les regroupe en classes, de sorte que chaque modalité se trouve dans une et une seule classe.

Tableau ordonné

Un tableau ordonné comprend 5 colonnes.

1. La première colonne reprendra les modalités x_i ou les classes de modalités suivies de leurs centres c_i (6 colonnes dans ce cas).
2. La deuxième colonne contiendra les effectifs n_i .
3. La troisième colonne contiendra les fréquences f_i . $f_i = \frac{n_i}{n}$, où n est l'effectif total.
4. La quatrième colonne contiendra les effectifs cumulés $N_i = n_1 + n_2 + \dots + n_i$.
5. La cinquième colonne contiendra les fréquences cumulées $F_i = \frac{N_i}{n}$.

Réponse à l'exercice

1. Cotes d'un contrôle

Population : les élèves de 5^{ème}.

Individu : un élève de 5^{ème}

Échantillon : les élèves de 5^{ème} qui ont présenté le test

Caractère : la cote obtenue

Type de caractère : quantitatif

Modalités : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Modalités x_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i	Effectifs cumulés N_i	Fréquences cumulées F_i
1	3	2,68%	3	2,68%
2	6	5,36%	9	8,04%
3	7	6,25%	16	14,29%
4	19	16,96%	35	31,25%
5	18	16,07%	53	47,32%
6	21	18,75%	74	66,07%
7	16	14,29%	90	80,36%
8	13	11,61%	103	91,96%
9	6	5,36%	109	97,32%
10	3	2,68%	112	100%
$n = 112$		Total :		

$n_6 = 21$ $f_3 = 6,25\%$ $N_9 = 109$ $F_6 = 66,07\%$

4.3 Diagrammes et graphiques

A retenir

Les modalités sont toujours sur l'axe horizontal (x).

Un polygone (une ligne polygonale) est formée de segments de droites bouts-à bouts (les sommets).

Un histogramme est formé de rectangles : de loin, on dirait une rue de gratte-ciels.

Un graphique en bâtonnets est formé de... bâtonnets, pas de rectangles.

Réponse aux exercices

1. Cotes d'un test

Diagramme en bâtonnets

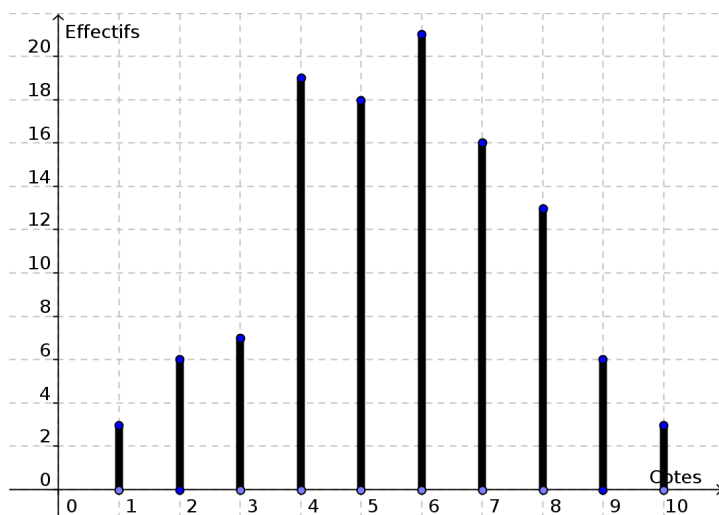
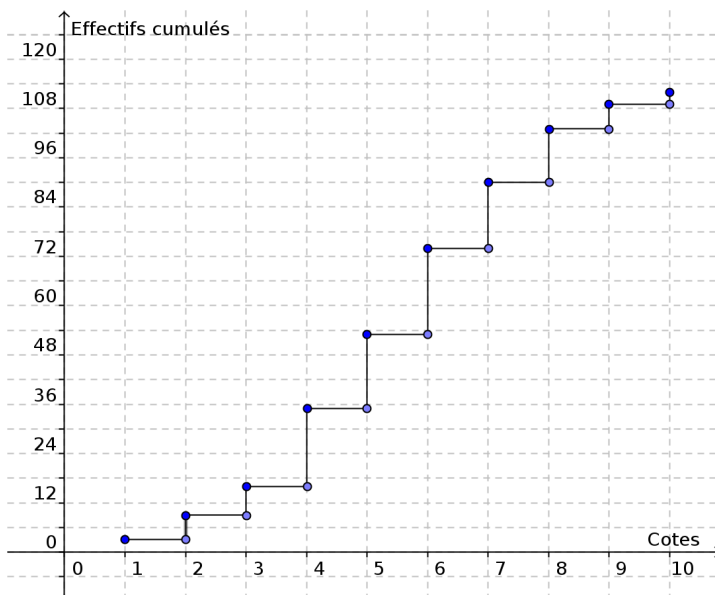


Diagramme en escalier



4.4 Indicateurs de position

A retenir

Définitions

- Le mode est la modalité auquel correspond l'effectif (ou la fréquence) le (la) plus élevé(e). Lorsque les modalités sont regroupées en classes, on utilise le centre de classe.
- La moyenne arithmétique $\bar{x}$ d'un caractère quantitatif est le quotient de la somme de tous les résultats obtenus par l'effectif total.

Si p est le nombre de modalités différentes, si n_1 est l'effectif de la modalité x_1 , n_2 celui de la modalité x_2 , ..., n_p celui de la modalité x_p et si n est l'effectif total, alors

$$\bar{x} = \frac{n_1.x_1 + n_2.x_2 + \dots + n_p.x_p}{n}$$

Dans le cas d'un caractère quantitatif regroupé en classes, les x_i doivent être remplacés par les centres c_i des classes dans la formule ci-dessus.

- La médiane est la modalité telle que la moitié de la population ait une modalité inférieure.

Le caractère doit être quantitatif.

Réponse aux exercices

	mode	médiane	moyenne
Taille des élèves			
Cote d'un contrôle	6	5,3	5,6

4.5 Indicateurs de dispersion

A retenir

Définition

Un paramètre de dispersion précise comment sont réparties les mesures autour d'une valeur centrale.

A chaque indicateur de position est associé un indicateur de dispersion qui précise comment sont réparties les mesures autour de cette valeur centrale.

Indicateur de position	Indicateur de dispersion
Mode	Étendue
Moyenne	Écart-type
Médiane	Écart inter-quartile

Définitions

- L'étendue (E) d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite modalité.

Si des centres de classe ont été définis, ils peuvent être utilisés.

L'étendue est l'indicateur de dispersion associé au mode.

- La variance est définie par la formule

$$V = \frac{n_1 \cdot (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 \cdot (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p \cdot (x_p - \bar{x})^2}{n}$$

dans laquelle $\bar{x}$ est la moyenne, n l'effectif total, x_i le centre de la classe i et n_i son effectif.

- L'écart-type est défini par $\sigma = \sqrt{V}$.

L'écart-type est l'indicateur de dispersion associé à la moyenne.

- Les quartiles Q_1 et Q_3 , parfois appelés $Q_{1/4}$ et $Q_{3/4}$ sont définis comme ceci.

Q_1 (ou $Q_{1/4}$) est la modalité telle que 25% des modalités lui soit inférieures.

Q_3 (ou $Q_{3/4}$) est la modalité telle que 75% des modalités lui soit inférieures.

• L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1$.

L'écart interquartile est l'indicateur de dispersion associé à la médiane.

Réponse aux exercices

1.		mode	étendue	médiane	écart inter-quartile	moyenne	écart-type
	Taille des élèves						
	Cote d'un contrôle	6	9	5,3	3	5,6	2,1

2. (Ex 21) On considère la série de données suivantes : 2 ; 4 ; 6 ; 8

(a) Calculez-en la moyenne et exprimez son écart-type.

$$\bar{x} = 5 \quad \sigma = \sqrt{\frac{(5-2)^2 + (5-4)^2 + (5-6)^2 + (5-8)^2}{4}}$$

(a) On ajoute une donnée à cette série. Parmi les données ci-dessous, quelle est celle qui fera diminuer l'écart-type ?

0 5 8 9

Il s'agit de 5 car, sous le radical, on ajoutera 0 au numérateur et le dénominateur passera à 5.

3. (Ex 22) Vous obtenez un écart-type pour une série de vingt données. Après vérification, deux de ces données paraissent erronées. On les retire de la série et on recalcule l'écart-type.

Comment va évoluer le nouvel écart-type sur les dix-huit données par rapport à l'ancien écart-type sur les vingt données ?

Il peut diminuer, augmenter ou rester inchangé par rapport à l'ancien.

Considérons la série

1 1 1 1 1 1 1 1 1 10 10 19 19 19 19 19 19 19 19 de moyenne 10 et d'écart-type 8,76.

Si nous enlevons les 2 «10» l'écart-type augmente (9,26).

Si nous enlevons un «1» et 1 «19» l'écart-type diminue (8,73).

Le lecteur trouvera facilement une série monotone dont l'écart-type ne changera pas.

4. (Ex 24) Étant donné un nombre réel x , on considère les deux séries statistiques suivantes :

Série 1 : $x-2$; $x-1$; x ; $x+1$; $x+2$

Série 2 : x ; $x+1$; $x+2$; $x+3$; $x+4$

Comparez les écarts-types des deux séries.

La moyenne de la première série vaut x , celle de la deuxième $x+2$.

Toutefois, les écarts sont identiques : 2 ; 1 ; 0 ; 1 ; 2 (en valeurs absolues).

Réponse : L'écart-type de la série 1 est identique à celui de la série 2.

Chapitre 5

Géométrie analytique plane

5.0 Prérequis

A retenir

- Une équation est une égalité qui est vraie ou fausse.

Exemple : $3x - 4y = 7$ est vraie pour $x = 1$ et $y = -1$, noté $(1; -1)$
et fausse pour pour $x = 1$ et $y = 2$, noté $(1; 2)$.

- Résoudre un système de deux équations, c'est déterminer les couples $(x; y)$ tels que les deux équations soient vraies (solutions communes).

Exemple : $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ x + y = 0 \end{cases}$ a comme solution $(1; -1)$.

- La méthode des combinaisons consiste à remplacer une des deux équations du système par une somme de multiples (non nuls) des deux équations.

On obtient alors un système qui a les mêmes solutions que le système de départ.

Réponse aux exercices

Les détails se trouvent à l'adresse :



<http://tetramath.jean-luc-goffin.be/geometrie>

1. Résous les systèmes suivants par la méthode des combinaisons.

(a) $\left(-\frac{9}{5}; -\frac{1}{5}\right)$

(b) $\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$

(c) $\left(-\frac{5}{7}; -\frac{2}{7}\right)$

2. Résous les systèmes suivants par substitution.

(a) (4; 7)

(b) (2; -2)

(c) $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{8}{3}\right)$

3. Résous les systèmes suivants par la méthode de ton choix.

(a) (-1; 2)

(b) Pas de solution

(c) $\left(\frac{24}{7}; \frac{44}{7}\right)$

(d) Pas de solution

(e) $\left(-\frac{11}{8}; -\frac{5}{4}\right)$

4. (Ex 21) Ma voiture consomme 6 litres de carburant par 100 km lors de trajets en ville et 4 litres par 100 km lors de trajets hors ville. Le tableau suivant fournit le récapitulatif des distances, exprimées en km, parcourues en ville et hors ville lors de trois trajets, notés 1, 2 et 3.

	En ville	Hors ville
Trajet 1	x km	300 km
Trajet 2	5 km	y km
Trajet 3	15 km	200 km

Ma voiture a consommé 42,4 litres de carburant pour effectuer les trois trajets et 32 litres pour effectuer les parties hors ville des trajets 1 et 2.

Que valent x et y ?

La consommation par km en ville est de 0,06 et hors ville de 0,04.

Pour les 3 trajets, $0,06x + 0,04 \cdot 300 + 0,06 \cdot 5 + 0,04y + 0,06 \cdot 15 + 0,04 \cdot 200 = 42,4$ et

pour les 2 parties hors ville $0,04 \cdot 300 + 0,04 \cdot y = 32$ ce qui donne

$$\begin{cases} 0,06x + 0,04y + 12 + 0,3 + 0,9 + 8 = 42,4 \\ 0,04y + 12 = 32 \end{cases} \quad \begin{cases} 0,06x + 0,04y = 21,2 \\ 0,04y = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,06x + 20 = 21,2 \\ 0,04y = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1,2 \cdot 100}{20} \\ y = \frac{20 \cdot 100}{4} \end{cases} \quad \mathbf{x=20 \text{ et } y=500.}$$

5. On considère le système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ -ax + dy = -c \end{cases} \quad \text{où les inconnues } x \text{ et } y \text{ sont des nombres réels}$$

et où les nombres réels a , b , c et d sont non nuls.

Combien de solutions admet ce système ?

$$\begin{cases} ax + by = c \\ -ax + dy = -c \end{cases} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right| \cdot \begin{cases} ax + by = c \\ by + dy = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + by = c \\ (b + d)y = 0 \end{cases}$$

Si $b + d \neq 0$, la seule solution est $\left(\frac{c}{a}; 0\right)$.

Si $b + d = 0$, y vaut n'importe quel réel, chaque y donnant un x .

Ce système admet soit une solution, soit une infinité (au moins une solution).

6. Étant donné un paramètre β réel, on considère la système suivant :

$$\begin{cases} \beta x + \beta y = 1 \\ 1 + \beta y = 1 \end{cases}$$

Combien de solutions admet ce système ?

$$\begin{cases} \beta x + \beta y = 1 \\ 1 + \beta y = 1 \end{cases} \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right| \quad \begin{cases} \beta x - 1 = 0 \\ 1 + \beta y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta x = 1 \\ \beta y = 0 \end{cases}$$

Si $\beta \neq 0$ $\begin{cases} x = \frac{1}{\beta} \\ y = 0 \end{cases}$ le système admet une solution unique.

Si $\beta = 0$ $\begin{cases} 0 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$ le système n'admet pas de solution.

Le système n'admet pas de solution pour certaine(s) valeur(s) de β uniquement.

7. Construis les figures demandées.

Caractéristiques d'un vecteur

Le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- sa **direction** : celle de la droite AB
- son **sens** : de A vers B
- sa **norme** : la distance entre A et B , notée $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Remarques

- En physique, on définit une quatrième caractéristique, appelée point d'application, précisant la position de l'origine du vecteur. En mathématiques, en général on ne fixe pas l'origine, on parle alors de vecteur libre ; si par contre on choisit une origine particulière, on parle de vecteur lié.
- Le vecteur nul n'a ni direction, ni sens et sa norme vaut 0.
- Le vecteur nul a comme composantes $(0; 0)$.

Norme d'un vecteur

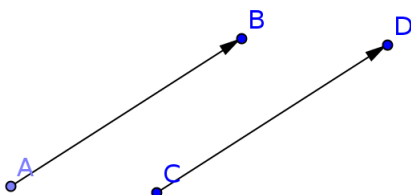
Définition : La norme d'un vecteur est la distance entre son origine et son extrémité.

La norme du vecteur $\overrightarrow{v}$ se calcule par $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se calcule par $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Vecteurs égaux

- Définition algébrique : Deux vecteurs qui ont les mêmes composantes sont égaux.
- Définition géométrique : Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils sont nuls tous les deux ou s'ils ont même direction
même sens
et même norme.
On écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Réponse aux exercices

1. Détermine les composantes et les normes des vecteurs

$$\overrightarrow{AB} (4; 2) \text{ et } \|\overrightarrow{AB}\| = 2\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{AC} (-4; 0) \text{ et } \|\overrightarrow{AC}\| = 4$$

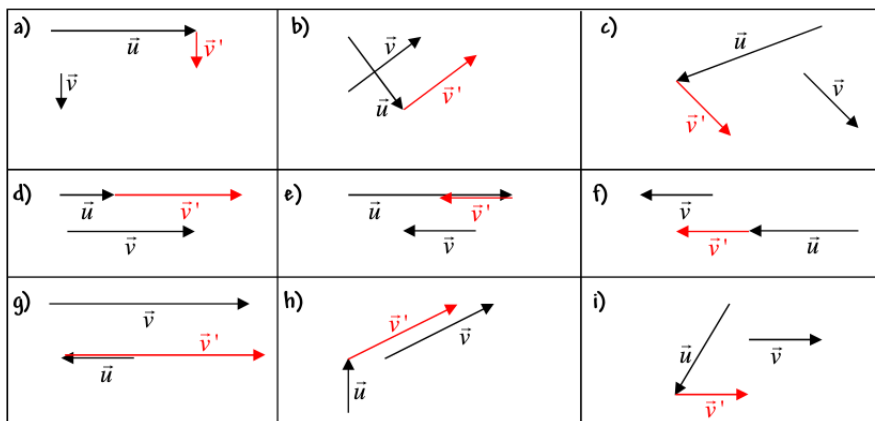
$$\overrightarrow{AD} (4; -3) \text{ et } \|\overrightarrow{AD}\| = 5$$

$$\overrightarrow{CB} (8; 2) \text{ et } \|\overrightarrow{CB}\| = 2\sqrt{17}$$

2. Donne avec précision la position relative des deux vecteurs donnés.

- (a) même extrémité, même norme
- (b) même direction (parallèles)
- (c) même norme, consécutifs
- (d) même origine
- (e) même extrémité, même direction (parallèles)
- (f) même direction (parallèles), consécutifs
- (g) même origine, même direction (parallèles), même sens
- (h) même direction (parallèles), même norme
- (i) consécutifs

3. Construis le vecteur égal à $\vec{v}$ qui est consécutif au vecteur $\vec{u}$.



4. Cite tous les vecteurs égaux à :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{GB}$$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{IB}$$

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \dots = \overrightarrow{HH} = \overrightarrow{II}.$$

5. Dans un repère, $A(2; 3)$, $B(-4; 5)$, $C(-3; -4)$ et $D(5; -1)$.

(a) $\overrightarrow{AB}(-6; 2)$, $\overrightarrow{BA}(6; -2)$, $\overrightarrow{AC}(-5; -7)$, $\overrightarrow{AD}(3; -4)$, $\overrightarrow{BC}(1; -9)$, $\overrightarrow{DB}(-9; 6)$, $\overrightarrow{CD}(8; 3)$ et $\overrightarrow{BB}(0; 0)$.

(b) $\|\overrightarrow{AB}\| = 2\sqrt{10}$ et $\|\overrightarrow{BD}\| = 3\sqrt{13}$.

6. Trouve les coordonnées de

(a) $A(4; 1)$

(b) $B(-5; 6)$

7. Dans chaque cas, détermine les coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

(a) $D(9; -5)$

(b) $D(1; \frac{14}{3})$

5.2 Opérations sur les vecteurs

A retenir

Relation de Chasles

Pour tous points A, B, C ,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

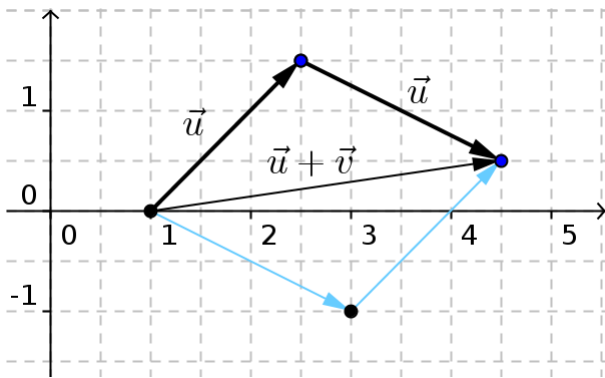
Opérations hybrides

Toute opération sur les vecteurs

donne la même opération sur les composantes.

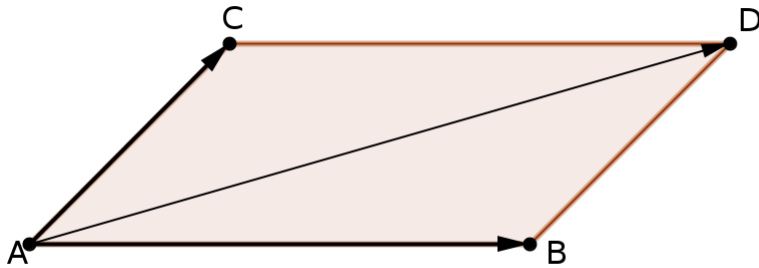
Somme de deux vecteurs

Dans un repère du plan, si $\vec{u}(u_1; u_2)$ et $\vec{v}(v_1; v_2)$, alors les composantes de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(u_1 + v_1; u_2 + v_2)$.



Règle du parallélogramme

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs de même origine,
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D est le quatrième sommet du parallélogramme $ABDC$.



Multiplication d'un vecteur par un nombre

Dans un repère du plan, si $\vec{v}(v_1; v_2)$,
 alors les composantes de $k \cdot \vec{v}$ sont $(k \cdot v_1; k \cdot v_2)$.

Géométriquement

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul. Alors, $k\vec{u}$ est un vecteur :

- de même direction que $\vec{u}$
- de même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et de sens contraire à $\vec{u}$ si $k < 0$
- de norme égale à $|k| \cdot \|\vec{u}\|$.

Si le vecteur $\vec{u}$ est nul ou si le réel k est nul, le vecteur $k\vec{u}$ est nul.

Vecteurs parallèles

Deux vecteurs sont parallèles ssi l'un est multiple de l'autre.

Autrement dit, $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD} \text{ ou } \overrightarrow{CD} = k \cdot \overrightarrow{AB} \text{ (pour un certain } k \in \mathbb{R}).$

En particulier, le vecteur nul est parallèle à tout vecteur.

NB

Des vecteurs parallèles sont parfois appelés **colinéaires**.

Vecteurs orthogonaux

Définition

Deux vecteurs sont orthogonaux si leurs directions forment un angle droit.

Notation

$$\vec{u} \perp \vec{v}$$

Vecteurs orthogonaux et composantes

Dans un repère orthonormé¹ du plan, le vecteur $\vec{u}(x_u; y_u)$ est orthogonal au vecteur $\vec{v}(x_v; y_v)$ si et seulement si $x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v = 0$.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v = 0$$

Décomposition d'un vecteur

Lorsque $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$

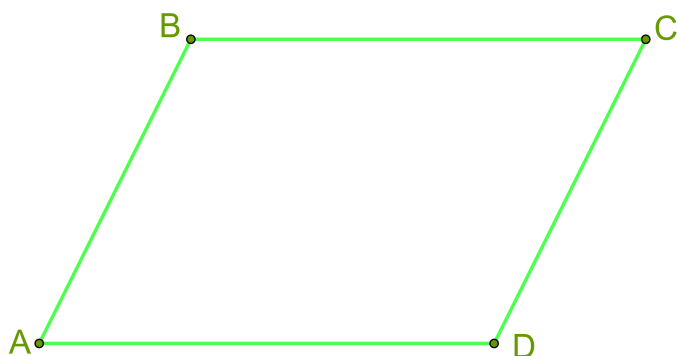
on parle de « décomposition » du vecteur $\overrightarrow{BD}$

comme s'il s'agissait de composer des translations.

C'est de là que provient le mot « composantes » (ici $(-2; 2)$ si $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ ne sont pas parallèles).

¹Un repère orthonormé a des axes perpendiculaires qui portent la même unité.

Parallélogramme et vecteurs égaux



$ABCD$ est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Milieu d'un segment



M milieu de $[A; B]$ $\iff \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$

Réponse aux exercices

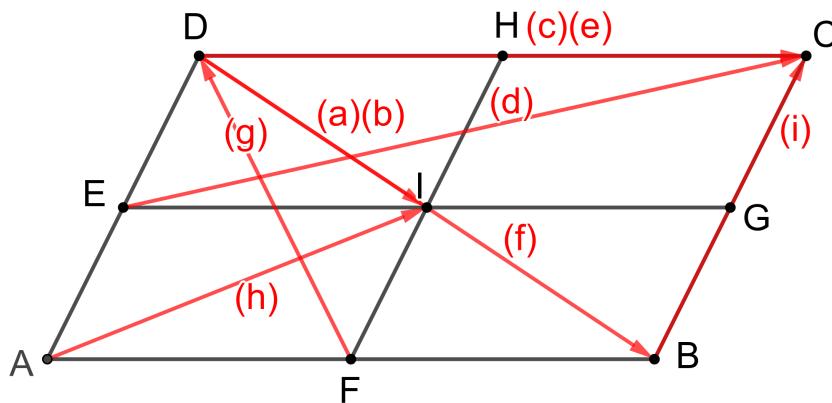
a)		b)		c)	
d)		e)		f)	
g)		h)			

1.

2. Complète les égalités suivantes.

- (a) $\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AB}$
 (b) $\overrightarrow{GD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IO}$
 (c) $\overrightarrow{CL} = -3\overrightarrow{EB}$
 (d) $\overrightarrow{OH} = \frac{7}{10}\overrightarrow{OE}$
 (e) $\overrightarrow{AO} = -\frac{14}{5}\overrightarrow{LG}$
 (f) $\overrightarrow{NF} = 2\overrightarrow{IE}$

3. Soit $ABCD$ un parallélogramme, F le milieu de $[AB]$,
 G le milieu de $[BC]$, H le milieu de $[CD]$, E le milieu de $[AD]$
 et I l'intersection des médianes.



Complète :

- (a) $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$
 (b) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$
 (c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BC}$
 (d) $\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB}$
 (e) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$
 (f) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DI} - \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{HB}$

4. Détermine les composantes des vecteurs

$$\vec{u} (1; 2) \quad \vec{v} (3; -2)$$

- (a) $\vec{u} + \vec{v} (4; 0)$
 (b) $\vec{v} - 2\vec{u} (1; -6)$
 (c) $2\vec{u} - \vec{v} (-1; 6)$

(d) $5\vec{u} - 3\vec{v} \quad (-4; 16)$

(e) $\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{3}{4}\vec{v} \quad \left(-\frac{7}{4}; \frac{5}{2}\right)$

5. Exprime les vecteurs suivants comme sommes de multiples des vecteurs $\vec{OI}$ et $\vec{OJ}$.

(a) $\vec{IA} = \vec{OJ}$

(b) $\vec{AB} = -2\vec{OJ}$

(c) $\vec{AJ} = -\vec{OI}$

(d) $\vec{BC} = -2\vec{OI}$

(e) $\vec{OA} = \vec{OI} + \vec{OJ}$

(f) $\vec{AC} = -2\vec{OI} - 2\vec{OJ}$

(g) $\vec{DO} = \vec{OI} - \vec{OJ}$

(h) $\vec{BD} = -2\vec{OI} + 2\vec{OJ}$

6. Détermine les composantes des vecteurs $\vec{t}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ parallèles au vecteur $\vec{u}$.

(a) $\vec{u} \quad (1; -2) \quad \vec{t} \quad (2; -4) \quad \vec{v} \quad (-3; 6) \quad \vec{w} \quad \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$

(b) $\vec{u} \quad \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) \quad \vec{t} \quad (-3; 2) \quad \vec{v} \quad (-3; 2) \quad \vec{w} \quad \left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$

7. Détermine les composantes des vecteurs $\vec{t}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ orthogonaux au vecteur $\vec{u}$.

(a) $\vec{u} \quad (1; -2) \quad \vec{t} \quad (2; 1) \quad \vec{v} \quad \left(-3; -\frac{3}{2}\right) \quad \vec{w} \quad \left(1; \frac{1}{2}\right)$

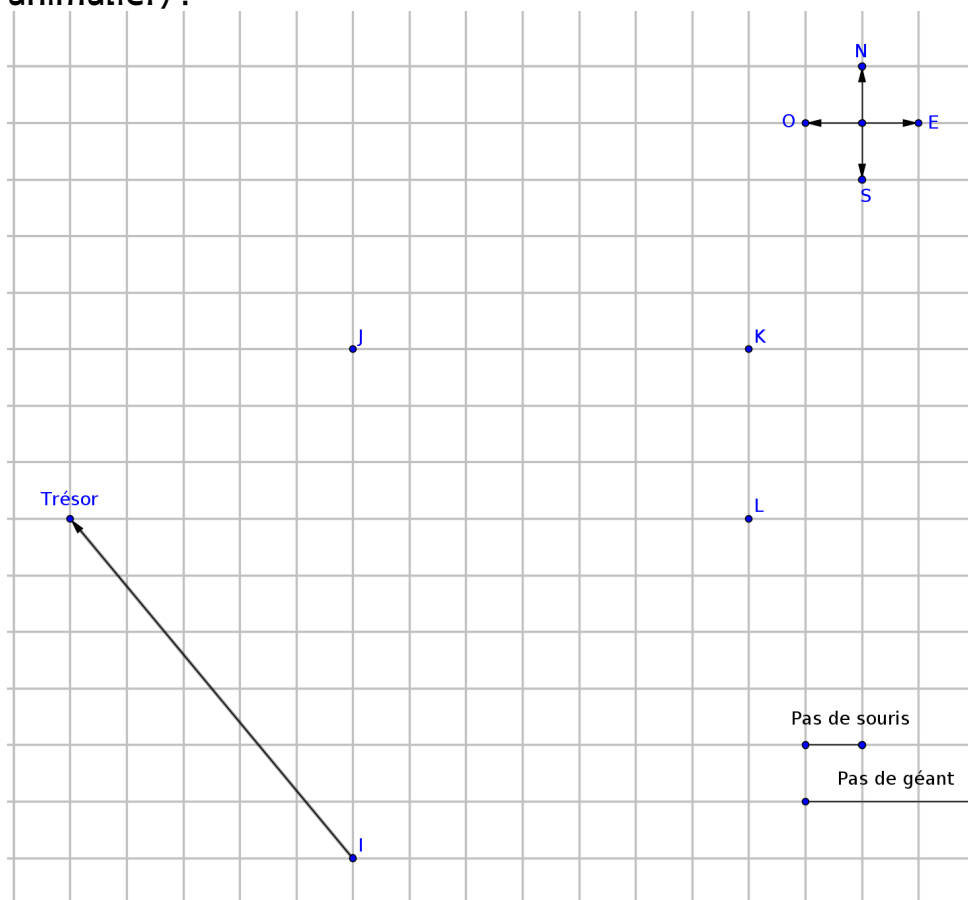
(b) $\vec{u} \quad \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) \quad \vec{t} \quad (6; 9) \quad \vec{v} \quad \left(-3; -\frac{9}{2}\right) \quad \vec{w} \quad \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$

8. Le trésor du pirate est enterré dans une île déserte.

Indiana sait qu'il doit parcourir 3 pas de géant vers le nord, 7 pas de souris vers l'est, puis 3 pas de souris vers le sud et enfin 4 pas de géants vers l'ouest pour y parvenir.

(a) Où se trouve le trésor?

- (b) Comment y arriver plus simplement (sur le dessin et en français animalier) ?



1 pas de géant et 2 pas de souris à l'ouest, 2 pas de géant vers le nord

9. (Ex 21) Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A(1; 2)$, $B(x; 8)$ et $C(10; y)$ tels que $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

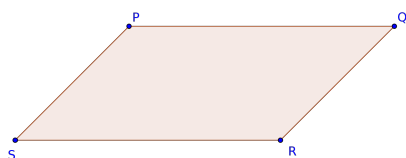
Que vaut (x, y) ?

$$\overrightarrow{AB}(x-1; 6) \text{ et } \overrightarrow{BC}(10-x; y-8) \text{ donc } \begin{cases} 2(x-1) = 10-x \\ 12 = y-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-2+x=10 \\ 20=y \end{cases} \quad \text{Réponse : } (4; 20).$$

10. (Ex 22) On considère quatre points P, Q, S et R formant un parallélogramme tel que $\overrightarrow{PQ}$ est parallèle à $\overrightarrow{SR}$ et $\overrightarrow{PS}$ est parallèle à $\overrightarrow{QR}$.

Exprime le vecteur $\overrightarrow{QS} - 2\overrightarrow{PQ}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{PS}$ et $\overrightarrow{PR}$?

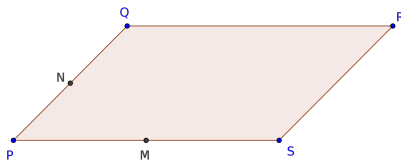


$$\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PS} = 2\overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PR}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} = -\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PR}.$$

$$\overrightarrow{QS} - 2\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PR} + 2\overrightarrow{PS} - 2\overrightarrow{PR} = 4\overrightarrow{PS} - 3\overrightarrow{PR}$$

11. (Ex 23) Le dessin ci-dessous représente le parallélogramme PQRS (les droites PQ et SR sont parallèles et les droites PS et QR sont parallèles). Notons M le milieu du segment $[P, S]$ et N le milieu du segment $[P, Q]$



Exprime le vecteur $\overrightarrow{MN}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{PS}$ et $\overrightarrow{RS}$.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}.$$

$$2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{SR}.$$

Réponse : $2\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{PS} - \overrightarrow{RS}$

5.3 Équations d'une droite

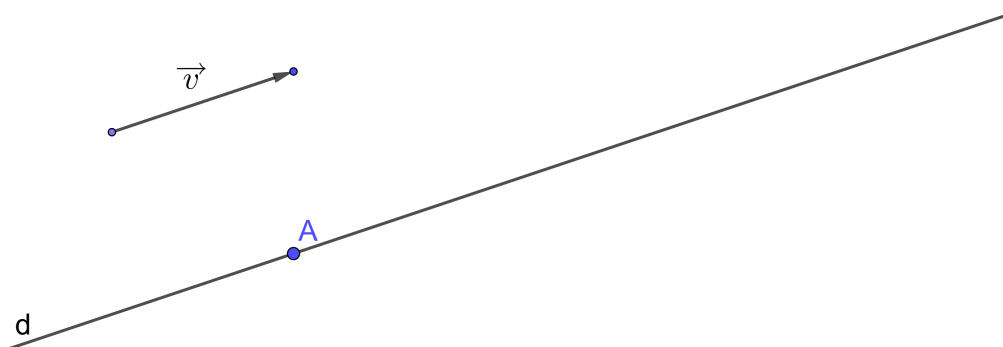
Dans toute cette section le repère est orthonormé.

A retenir

Équation vectorielle d'une droite

Au départ, A est un point et $\vec{v}$ un vecteur non nul.

Ils déterminent une droite dont la direction est $\vec{v}$ (vecteur directeur).



Le point P appartient à la droite si et seulement si $\overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{v}$.
 $\overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{v}$ est une équation vectorielle de la droite.

Si A et B sont deux points distincts, il existe une seule droite contenant A et B , appelée droite AB (axiome d'Euclide).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a la direction de la droite AB . $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ (vecteur directeur).

Le point P appartient à la droite AB si et seulement si $\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.
 $\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ est une équation vectorielle de la droite.

Lorsque l'équation $\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ est fausse, le point P n'appartient pas à la droite AB .

Lorsque l'équation $\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ est vraie, le point P appartient à la droite AB .

Faux	Vrai

Équations paramétriques d'une droite

Au départ, A est un point et $\vec{v}$ un vecteur non nul.

Dans un repère du plan, la droite d contenant le point $A(x_A; y_A)$ et de direction $\vec{v}(x_v; y_v)$ a comme équation

$$\begin{cases} x - x_A = k.x_v \\ y - y_A = k.y_v \end{cases}.$$

En clair, le point $P(x; y)$ appartient à la droite d ssi $\begin{cases} x - x_A = k.x_v \\ y - y_A = k.y_v \end{cases}$.

Si la droite est donnée par 2 points distincts $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, il suffit de prendre le vecteur directeur $\vec{v} = \overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Tu obtiens

$$\begin{cases} x - x_A = k.(x_B - x_A) \\ y - y_A = k.(y_B - y_A) \end{cases} \text{ où } k \text{ est un nombre réel.}$$

Remarque

Il est possible d'obtenir autant de points qu'on veut de la droite en choisissant autant de valeurs de k .

Équation cartésienne d'une droite

Une équation cartésienne d'une droite peut s'obtenir en éliminant le paramètre k du système d'équations paramétriques de cette droite :

$$\begin{cases} x - x_A = k.x_v \\ y - y_A = k.y_v \end{cases}$$

1^{er} cas : droite parallèle à l'axe des ordonnées (verticale)

Cette droite contient deux points qui ont la même abscisse.

Un vecteur directeur est $\vec{v}(0; y_v)$.

Une droite verticale a une équation de la forme $x = x_A$.

2^{ème} cas : droite non verticale

$$d \equiv \begin{cases} x - x_A = k.x_v \\ y - y_A = k.y_v \end{cases}, \text{ où } x_v \neq 0$$

$$\begin{cases} \frac{x - x_A}{x_v} = k \\ y - y_A = k.y_v \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x - x_A}{x_v} = k \\ y - y_A = \frac{x - x_A}{x_v}.y_v \end{cases}$$

La deuxième équation devient $y - y_A = \frac{y_v}{x_v}(x - x_A) \iff y - y_A = \frac{y_v}{x_v}x - \frac{y_v}{x_v}x_A \iff$

$$y = \frac{y_v}{x_v}x - \frac{y_v}{x_v}x_A + y_A$$

Cette équation a la forme $y = mx + p$ avec $m = \frac{y_v}{x_v}$.

Nous voici revenu l'année dernière, avec une fonction du premier degré de pente m (fonction constante si $m = 0$).

Méthode rapide

La droite d est définie par le point $A(x_A; y_A)$ et le vecteur directeur $\vec{v}(x_v; y_v)$.

Le point $P(x; y)$ appartient à la droite d si et seulement si

les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{v}$ sont parallèles,

c'est-à-dire ssi leur déterminant est nul.

$$\overrightarrow{AP}(x - x_A; y - y_A)$$

$$P \in d \iff \begin{vmatrix} x - x_A & x_v \\ y - y_A & y_v \end{vmatrix} = 0$$

$$d \equiv y_v(x - x_A) - x_v(y - y_A) = 0$$

Forme canonique (ou implicite) d'une équation cartésienne

Dans un repère du plan, l'équation $ax + by + c = 0$

où a et b ne sont pas tous les deux nuls, est celle d'une droite.

Exemples

1. Si $a = 0$ l'équation donne, par exemple, $3y + 4 = 0 \iff 3y = -4 \iff y = -\frac{4}{3}$ qui est une droite horizontale (pente 0).
2. Si $b = 0$ l'équation donne, par exemple, $2x + 3 = 0 \iff 2x = -3 \iff x = -\frac{3}{2}$ qui est une droite verticale (pas de pente).
3. Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ l'équation donne, par exemple, $2x + 3y - 4 = 0 \iff 3y = -2x + 4 \iff y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ qui est une droite oblique (pente $-\frac{2}{3}$).

Dans un repère du plan,

toute droite a pour équation $ax + by + c = 0$ où a et b ne sont pas tous les deux nuls.

Réponse aux exercices

	AB	BC	CA
Équation vectorielle	$\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{CA}$
Vecteur directeur	$\vec{v} (2; -4)$	$\vec{v} (3; 5)$	$\vec{v} (-5; -1)$
1. Équations paramétriques	$\begin{cases} x - 1 = 2k \\ y - 2 = -4k \end{cases}$	$\begin{cases} x - 3 = 3k \\ y + 2 = 5k \end{cases}$	$\begin{cases} x - 6 = -5k \\ y - 3 = -k \end{cases}$
Pente	$\frac{-4}{2} = -2$	$\frac{5}{3}$	$\frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$
Équation cartésienne	$y = -2x + p$ $2 = -2 + p \Rightarrow p = 4$ $y = -2x + 4$	$y = \frac{5}{3}x + p$ $-2 = 5 + p \Rightarrow p = -7$ $y = \frac{5}{3}x - 7$	$y = \frac{1}{5}x + p$ $3 = \frac{6}{5} + p \Rightarrow p = \frac{9}{5}$ $y = \frac{1}{5}x + \frac{9}{5}$

2. Détermine un système d'équations paramétriques et une équation cartésienne de la droite contenant les points suivants :

(a) $\overrightarrow{AB}(-3; -6)$ $m = 2$ $y = 2x + p$ Réponse : $y = 2x - 3$

(b) $\overrightarrow{AB}(2; 1)$ $m = \frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{2}x + p$ Réponse : $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

(c) $\overrightarrow{AB}(-2; 0)$ $m = 0$ $y = p$ Réponse : $y = 4$

3. Dans chacun des cas, détermine une équation cartésienne de la droite d

(a) $m = -3$ Réponse : $y = -3x - 1$

(b) Droite verticale Réponse : $x = 3$

(c) $m = 0$ Réponse : $y = 2$

(d) $m = 6$ Réponse : $y = 6x - 17$

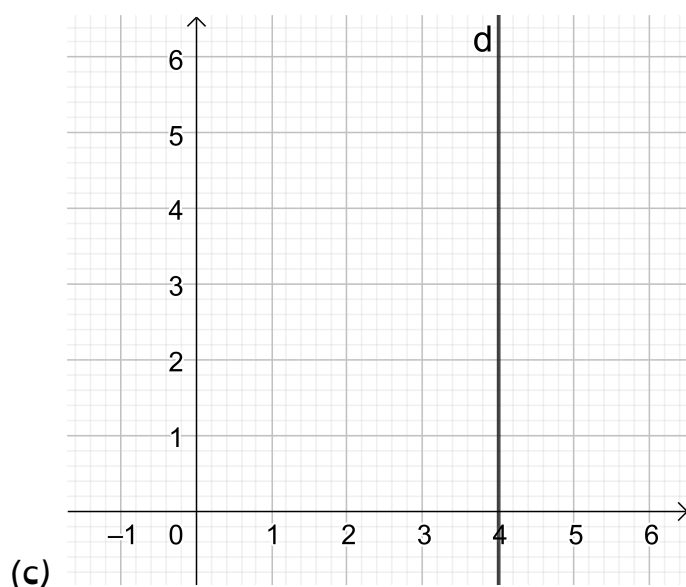
(e) $m = 0$ Réponse : $y = -2$

(f) Droite verticale Réponse : $x = 3$

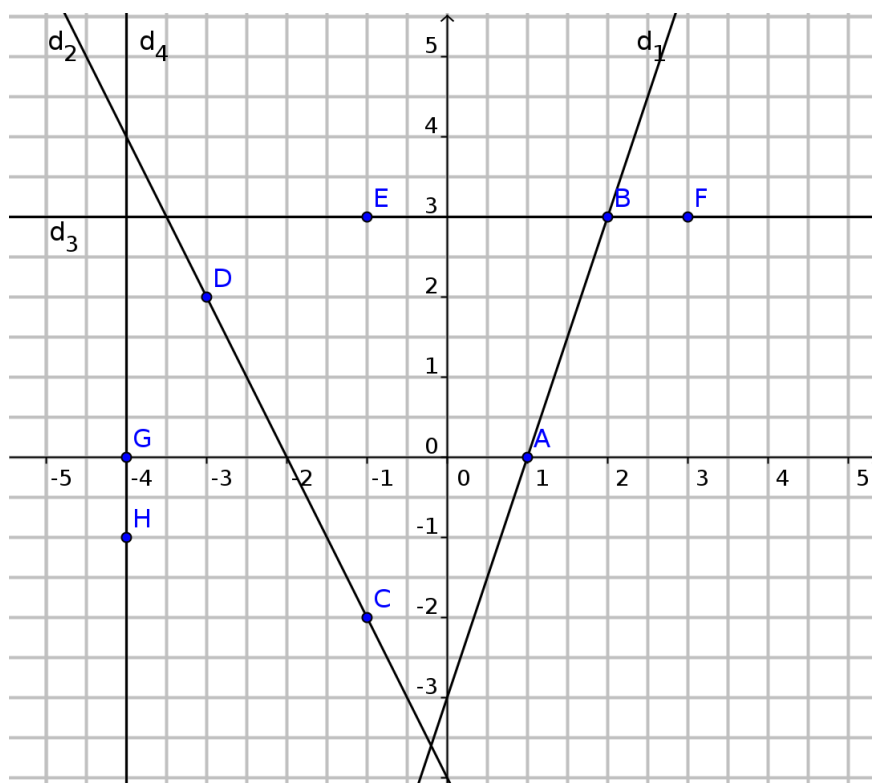
4. Dans un repère du plan, on considère les points $A(4; 1)$ et $B(4; -2)$.

(a) $\vec{v} (0; -3)$ Réponse $d \equiv \begin{cases} x - 4 = 0 \\ y - 1 = -3k \end{cases}$

(b) $(4; 0)$, $(4; 2)$ et $(4; -1)$



5. Trace et donne la pente des droites suivantes



- (a) 3
- (b) -2
- (c) 0
- (d) pas de pente

6. Détermine une équation cartésienne des droites suivantes :

- (a) $d_1 \equiv y = 2x + 5$
- (b) $d_2 \equiv y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$

(c) $d_3 \equiv x = -6$

(d) $d_4 \equiv y = -2$

(e) $d_5 \equiv y = -2x$

(f) $d_6 \equiv x = -1$

(g) $d_7 \equiv y = x + 5$

(h) $d_8 \equiv y = -6$

7. Détermine des équations paramétriques de la droite

(a) $d \equiv \begin{cases} x = 2 - 4k \\ y = 3 + k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$

(b) $d' \equiv \begin{cases} x = -5 - 4k \\ y = 6 + k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$

8. droite d définie par le système d'équations paramétriques $d \equiv \begin{cases} x = 2k - 3 \\ y = -k + 5 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$

(a) $A(-3; 5)$ et $\vec{v}_d(2; -1)$.

(b) $d \cap Ox : (7; 0) \quad d \cap Oy : \left(0; \frac{7}{2}\right)$

(c) $d' \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2} + k \\ y = -\frac{2}{3} + 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

(d) $d \equiv y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ et $d' \equiv y = 2x - \frac{5}{3}$

(e) $\left(\frac{31}{15}; \frac{37}{15}\right)$

9. Trouve le coefficient directeur (pente) des droites suivantes puis indique si elles sont verticales, horizontales, croissantes ou décroissantes.

(a) $m_{d_1} = -4 \quad \searrow$

(b) $m_{d_2} = \frac{3}{4} \quad \nearrow$

(c) $m_{d_3} = \frac{3}{2} \quad \nearrow$

(d) Pas de pente d_4 est verticale

(e) $m_{d_5} = \frac{3}{4} \quad \nearrow \quad m_{d_6} = 0 \quad d_6$ est horizontale.

10. $AB \equiv y = -\frac{3}{4}x + \frac{17}{4} \quad 8 = \frac{15}{4} + \frac{17}{4} \quad A, B$ et C sont alignés.

5.4 Droites parallèles ou perpendiculaires

A retenir

Dans ce qui suit, d_1 et d_2 sont deux droites du plan de vecteurs directeurs $\vec{v}_1(x_{v1}; y_{v1})$ et $\vec{v}_2(x_{v2}; y_{v2})$ et de pentes m_1 et m_2 .

Le repère est orthonormé si nécessaire (perpendicularité).

- Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le même vecteur directeur.
 - Deux droites qui ont la même pente sont parallèles.
 - Deux droites verticales sont parallèles.
 - Deux droites sont perpendiculaires lorsque leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux : $x_{v1} \cdot x_{v2} + y_{v1} \cdot y_{v2} = 0$.
 - Lorsque $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ (inverse de l'opposé), les droites sont perpendiculaires.
- On peut aussi retenir $m_1 \cdot m_2 = -1$.

- Une droite verticale (pas de pente) est perpendiculaire à une droite horizontale (pente 0).

Exemple : $d \equiv x = 2$ et $d' \equiv y = -3$ sont perpendiculaires.

- Une droite horizontale (pente 0) est perpendiculaire à une droite verticale (pas de pente).

Exemple : $d \equiv y = 4$ et $d' \equiv x = 1$ sont perpendiculaires.

Réponse aux exercices

1. Détermine un système d'équations paramétriques de la droite

$$(a) \quad d \equiv \begin{cases} x - 2 = -k \\ y - 3 = -4k \end{cases}$$

$$(b) \quad d_1 \equiv \begin{cases} x + 1 = -k \\ y - 2 = -4k \end{cases} \quad \text{contenant le point } C(-1; 2) \text{ et parallèle à } d.$$

$$(c) \quad d_2 \equiv \begin{cases} x + 2 = 4k \\ y = -k \end{cases} \quad \text{contenant le point } D(-2, 0) \text{ et perpendiculaire à } d.$$

2. Détermine une équation cartésienne de chacune des droites suivantes.

(a) $d_1 \equiv y = -\frac{1}{2}x$

(b) $d_2 \equiv y = \frac{2}{3}x + 2$

(c) $d_3 \equiv y = -2x + 3$

(d) $d_4 \equiv y = 2$

(e) $d_5 \equiv x = -7$

(f) $d_6 \equiv y = -\frac{1}{3}x + 1$

(g) $d_7 \equiv y = -5x - 13$

(h) $d_8 \equiv y = -\frac{1}{3}x$

(i) $d_9 \equiv y = -\frac{7}{4}x - 1$

(j) $d_{10} \equiv x = 5$

(k) $d_{11} \equiv y = \frac{x}{10} + 3$

(l) $d_{12} \equiv y = 2$

3. Établis les correspondances entre les deux colonnes.

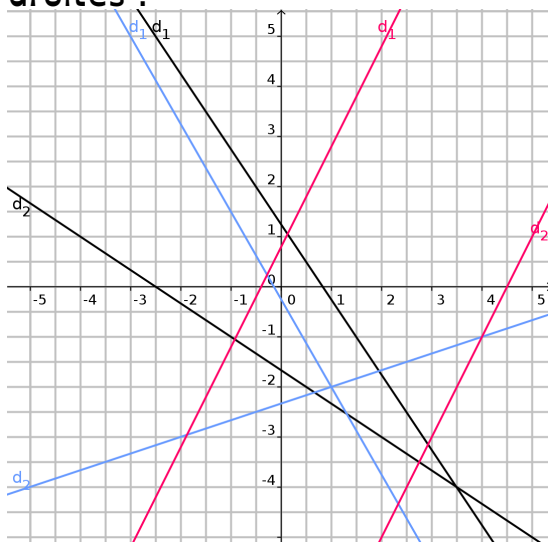
1) B C et H

2) A D et G

3) E et F

4) C et I

4. Trouve, graphiquement et par calcul, l'éventuel point d'intersection des droites :



(a) $\left(\frac{7}{2}; -4\right)$

(b) $(1; -2)$

(c) Pas de point d'intersection : d_1 et d_2 sont parallèles.

5. Détermine l'équation explicite des droites suivantes.

(a) $a \equiv y = -\frac{2}{5}x - \frac{3}{5}$

(b) $b \equiv y = -x + 2$

(c) $c \equiv y = -1$

(d) $d \equiv y = -3x + 7$

(e) $e \equiv y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$

(f) $f \equiv y = \frac{1}{8}x - 3$

(g) $g \equiv x = 2$

(h) $h \equiv y = -5x - 13$

(i) $i \equiv y = -\frac{7}{4}x - 1$

(j) $j \equiv y = -\frac{1}{3}x$

(k) $k \equiv y = -5$

(l) $l \equiv x = 10$

6. Trouve graphiquement, puis par calcul, l'éventuel point d'intersection des droites suivantes.

(a) $\left(\frac{8}{5}; \frac{1}{8}\right)$

(b) $\left(-\frac{2}{13}; \frac{7}{13}\right)$

(c) Pas de point d'intersection : droites parallèles distinctes

7. (Ex 23) Dans le plan muni d'un repère cartésien orthonormé, on considère la droite qui passe par les points $(0; 16)$ et $(10; 0)$. On considère également une autre droite passant par l'origine et de pente $\frac{3}{5}$.

Que vaut l'abscisse x du point d'intersection de ces deux droites ?

La première droite a comme pente $-\frac{16}{10} = -\frac{8}{5}$. Une équation de cette droite est donc

$$y = -\frac{8}{5}x + p \text{ où } 16 = -\frac{8}{5} \cdot 0 + p \Rightarrow p = 16.$$

L'autre droite a comme équation $y = \frac{3}{5}x$.

$$\text{Intersection} \begin{cases} y = -\frac{8}{5}x + 16 \\ y = \frac{3}{5}x \end{cases} \Rightarrow -\frac{8}{5}x + 16 = \frac{3}{5}x \Rightarrow 16 = \frac{3}{5}x + \frac{8}{5}x$$

$$16 = \frac{11}{5}x \quad \text{Réponse : } \frac{80}{11}$$

8. (Ex 22) Dans le plan muni d'un repère cartésien orthonormé, on considère les points

$$A(2; 3) \quad B(7; 6) \quad C(4; 1)$$

Soit d_1 la droite contenant les points A et B, d_2 la droite comprenant le point C et perpendiculaire à d_1 et en fin d_3 la droite d'équation $y = -2x + 8$.

Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de d_2 et d_3 ?

- (a) $(-2; 6)$
- (b) $(-1; 5)$
- (c) $(1; 6)$
- (d) $(1; 7)$

Seul le point $(1; 6)$ appartient à la droite d_3 ($6 = -2 + 8$). Réponse (c).

9. (Ex 24) Dans le plan muni d'un repère cartésien Oxy on considère la droite d passant par le point $(1; 5)$ et parallèle à la droite passant par les points $(0; 240)$ et $(120; 0)$.

Quelle est l'abscisse de l'intersection entre la droite d et l'axe Ox ?

La pente de la droite d est $\frac{-240}{120} = -2$. $d \equiv y = -2x + p$ où $5 = -2 + p$.

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{Réponse : } \frac{7}{2} = \frac{14}{4}.$$

10. (Ex 25) Dans le plan muni d'un repère cartésien orthonormé, on considère la droite d de pente $m = \sqrt{2}$ passant par le point $(-3; \sqrt{2})$ et la droite d' perpendiculaire à d et passant par le point $(0; 3)$.

Que vaut l'abscisse du point d'intersection de d' avec l'axe des abscisses ?

$$d' \text{ a comme pente } -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad d' \equiv y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 3$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}x = 3$$

Réponse : $3\sqrt{2}$.

partie V

Retenir et appliquer (m54)

Chapitre 1

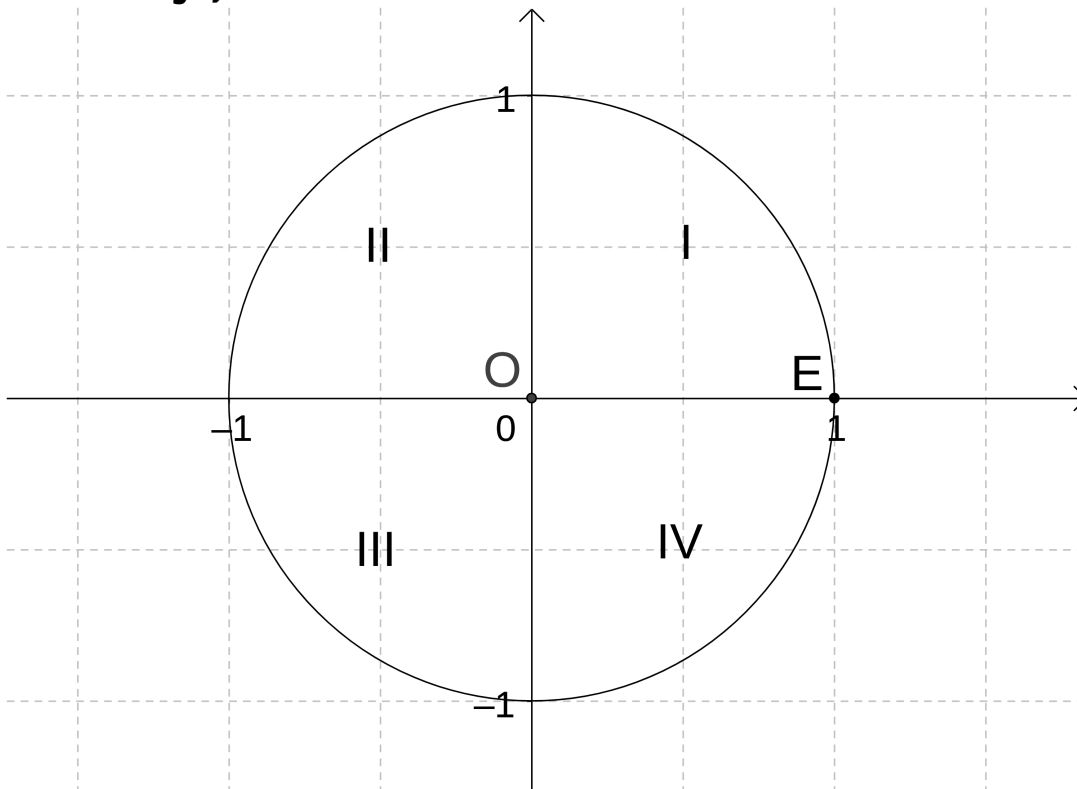
Fonctions trigonométriques

1.0 Prérequis

A retenir

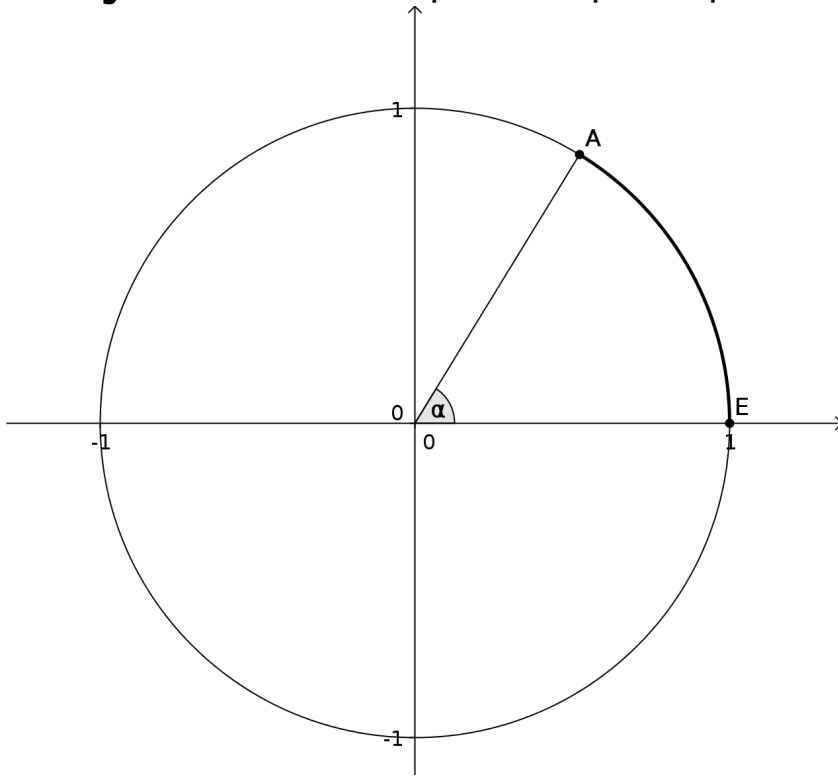
Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est le cercle centré à l'origine du repère (orthonormé) et de rayon 1. Son origine est le point $(1;0)$ et son sens est le sens anti-horlogique.



Propriété

Un angle orienté α est représenté par un point A du cercle trigonométrique.



C'est ce qui fait du cercle trigonométrique le rapporteur universel. Après tout, un rapporteur n'est qu'une machine qui représente un angle par un point.

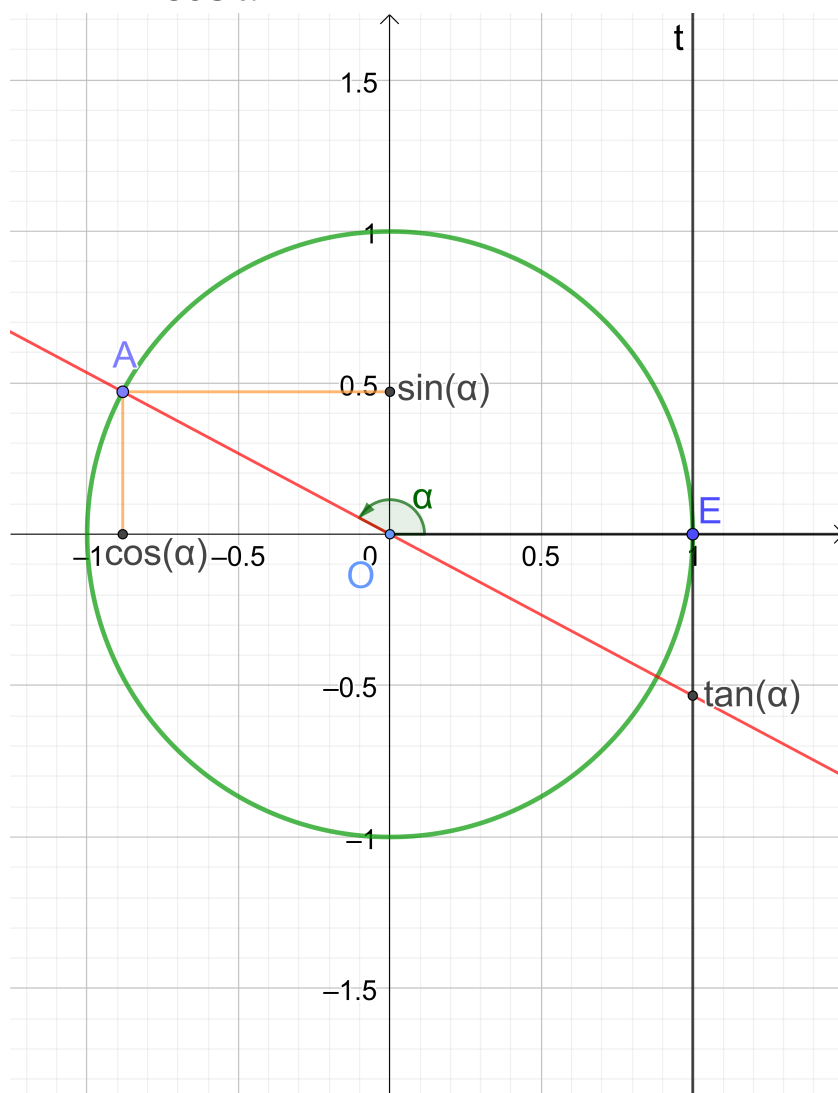
Nombres trigonométriques d'un angle orienté

Lorsque l'angle α est représenté par le point A du cercle trigonométrique,

$\cos \alpha$ est l'abscisse du point A .

$\sin \alpha$ est l'ordonnée du point A .

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$



Propriétés

1. $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$

2. $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

3. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ Formule fondamentale !

Fonction du second degré

$f : x \rightarrow ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) est une fonction du second degré.

Le graphe d'une fonction du second degré est une parabole
axe

$$Axe \equiv x = -\frac{b}{2a}$$

sommet

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\rho}{4a}\right)$$

variation

Si $a > 0$,			
x		$-\frac{b}{2a}$	
f	$\searrow$	m	$\nearrow$

Si $a < 0$,			
x		$-\frac{b}{2a}$	
f	$\nearrow$	M	$\searrow$

Transformées des fonctions de référence

A partir de f , construire	Transformation des coordonnées	Graphiquement
$h(x) = -f(x)$	$(x; y) \rightarrow (x; -y)$	symétrie d'axe Ox
$i(x) = f(-x)$	$(x; y) \rightarrow (-x; y)$	symétrie d'axe Oy
$j(x) = f(x) + p$	$(x; y) \rightarrow (x; y + p)$	translation verticale de p unités
$k(x) = f(x + p)$	$(x; y) \rightarrow (x - p; y)$	translation horizontale de $-p$ unités
$l(x) = p.f(x)$	$(x; y) \rightarrow (x; p.y)$	déformation verticale de coefficient p
$m(x) = f(p.x)$	$(x; y) \rightarrow \left(\frac{x}{p}; y\right)$	déformation horizontale de coefficient $\frac{1}{p}$

Réponse aux exercices

1. Les 12 points

Point	Mesure	sin	cos
A	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
B	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
C	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
F	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
G	135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
H	150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
I	210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
J	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
K	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
L	300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
M	315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
N	330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. sin égaux ou cos égaux

$$(a) \sin 30^\circ = \sin 150^\circ \quad \sin 45^\circ = \sin 135^\circ \quad \sin 60^\circ = \sin 120^\circ$$

$$\sin 210^\circ = \sin 330^\circ \quad \sin 225^\circ = \sin 315^\circ \quad \sin 240^\circ = \sin 300^\circ$$

$$(b) \cos 30^\circ = \cos 330^\circ \quad \cos 45^\circ = \cos 315^\circ \quad \cos 60^\circ = \cos 300^\circ$$

$$\cos 120^\circ = \cos 240^\circ \quad \cos 135^\circ = \cos 225^\circ \quad \cos 150^\circ = \cos 210^\circ$$

3. Étudie et représente

$$(a) f : x \rightarrow 2x^2 - 5x - 7$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R}$$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{5}{4} \quad \rho = 81$$

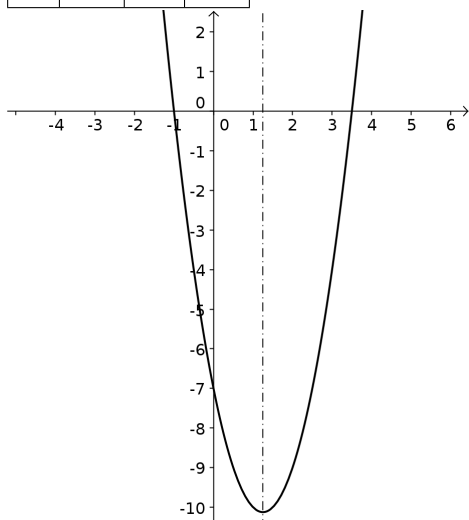
$$Axe \equiv x = \frac{5}{4} \quad \text{Sommet : } \left(\frac{5}{4}; -\frac{81}{8}\right)$$

$$G \cap Ox : (-1; 0) \text{ et } \left(\frac{7}{2}; 0\right)$$

$$G \cap Oy : (0; -7)$$

x		-1		$\frac{7}{2}$	
f	+	0	-	0	+

x		$\frac{5}{4}$	
f	$\searrow$	m	$\nearrow$



$$(b) f : x \rightarrow -x^2 + 3x + 4$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R}$$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \quad \rho = 25$$

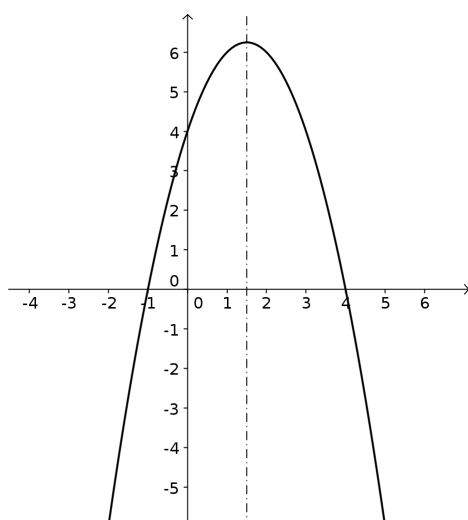
$$Axe \equiv x = \frac{3}{2} \quad \text{Sommet : } \left(\frac{3}{2}; \frac{25}{4}\right)$$

$$G \cap Ox : (-1; 0) \text{ et } (4; 0)$$

$$G \cap Oy : (0; 4)$$

x		-1		4	
f	-	0	+	0	-

x		$\frac{3}{2}$	
f	$\nearrow$	M	$\searrow$



(c) $f : x \rightarrow -x^2 + x - 1$

$\text{dom } f = \mathbb{R}$

$-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \quad \rho = -3$

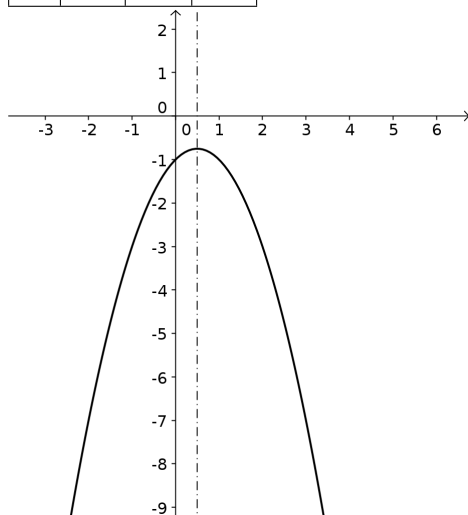
$Axe \equiv x = \frac{1}{2} \quad \text{Sommet : } \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$

$G \cap Ox = \emptyset$

$G \cap Oy : (0; -1)$

x	
f	-

x		$\frac{1}{2}$	
f	$\nearrow$	M	$\searrow$



4. Relie la fonction à la transformation.

(a) $g(x) = (x + 3)^2$: Translation horizontale de -3 unités

(b) $g(x) = 2x^2$: Déformation verticale de coefficient 2

(c) $g(x) = -x^2$: Symétrie d'axe Ox

(d) $g(x) = (x - 3)^2$: Translation horizontale de 3 unités

(e) $g(x) = (2x + 1)^2$: Déformation horizontale de coefficient $\frac{1}{2}$ suivie...

1.1 Mesures d'un angle en radians

A retenir

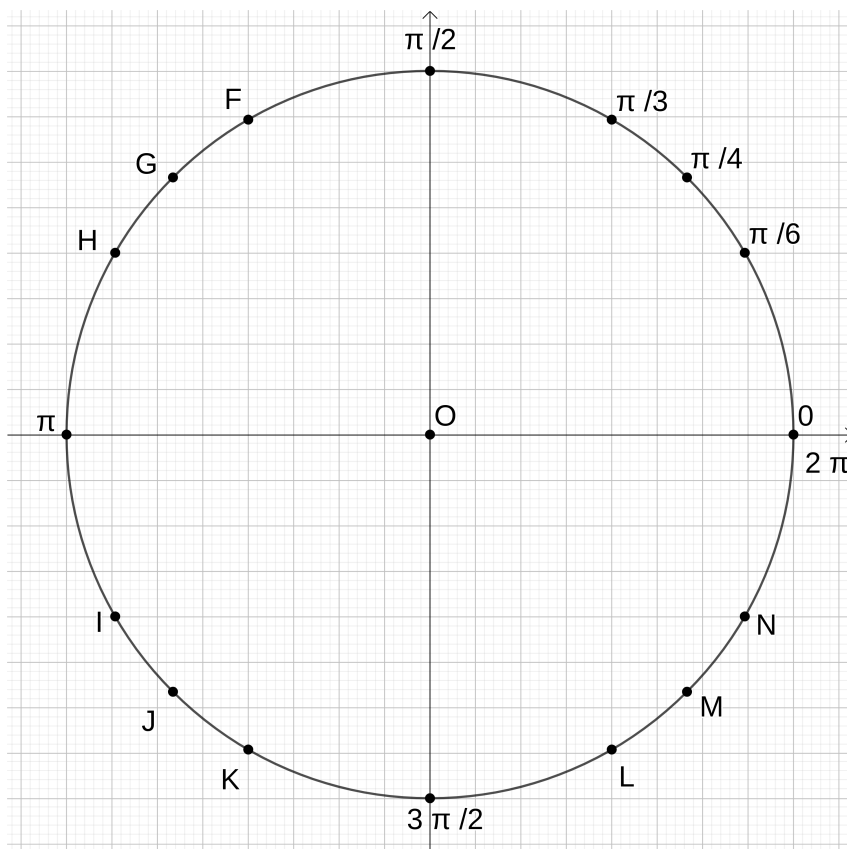
Définition

Le cercle trigonométrique est gradué grâce à sa longueur :

graduation 0 au point E , graduation π au point diamétralement opposé, etc.

Une mesure en radians de l'angle α est la graduation du point A sur le cercle trigonométrique.

Valeurs remarquables



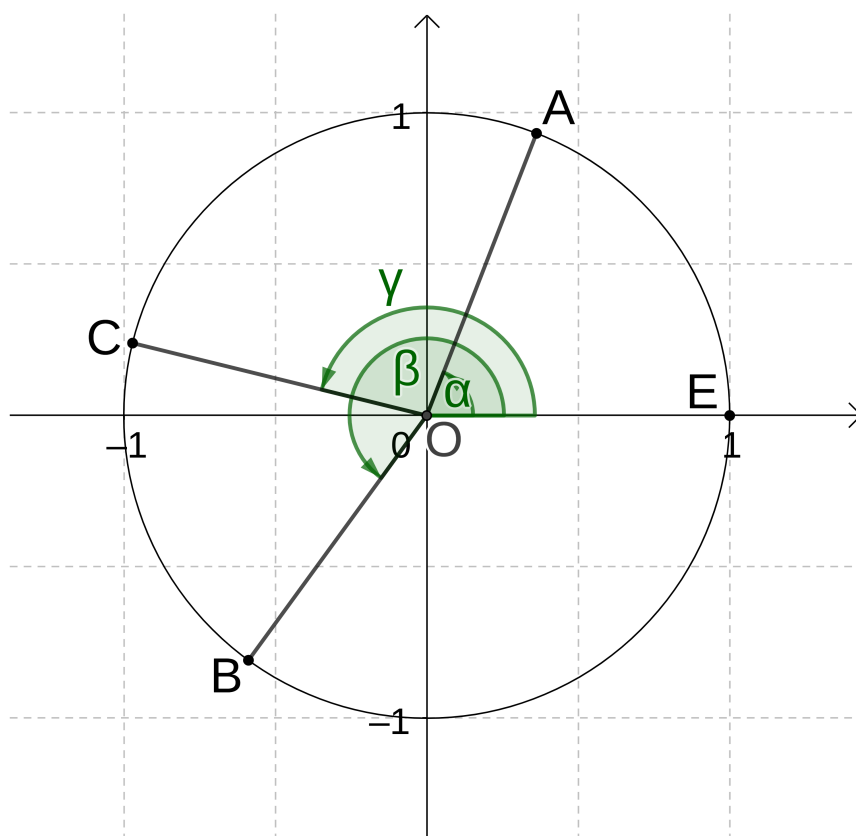
En remplaçant les mesures en degrés par des mesures en radians, cela donne :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

α	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	-1	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	0	1	0	-1	0	1
$\tan \alpha$		0		0		0

Réponse aux exercices

1. Représente sur le cercle trigonométrique les angles



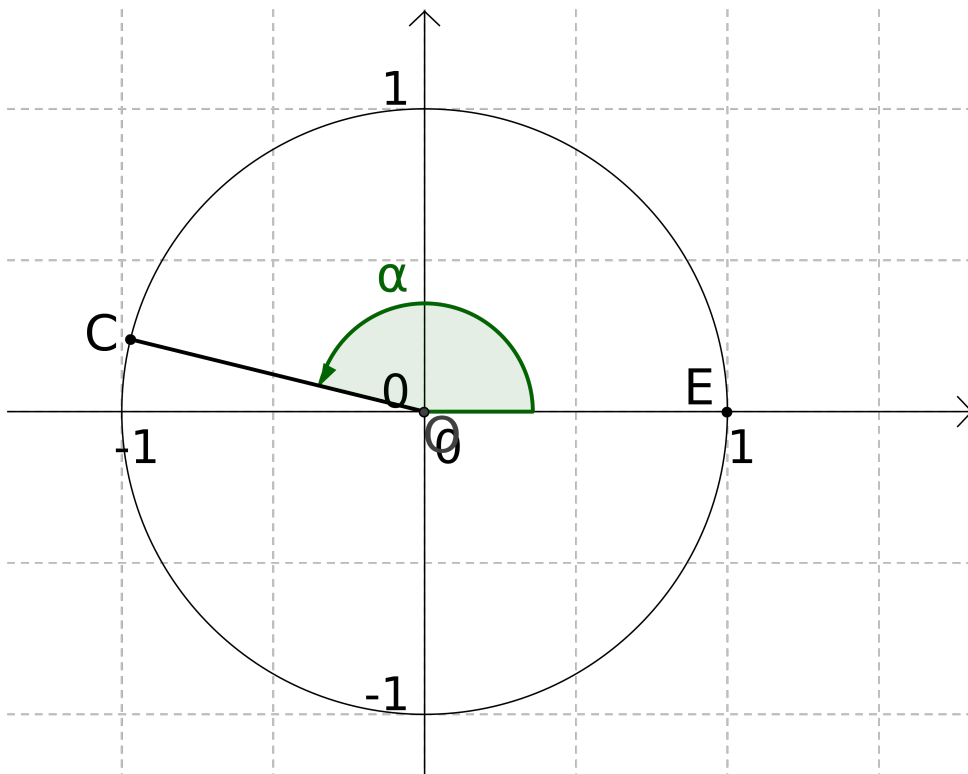
- (a) $\sin \alpha = 0,95$ $\cos \alpha = 0,35$
 (b) $\sin \beta = -0,8$ $\cos \beta = -0,6$
 (c) $\sin \gamma = 0,25$ $\cos \gamma = -0,95$

2. Donne une mesure en radians (2 décimales) de deux angles différents qui ont le même

(a) $\sin 1,14 = \sin 2$ Réponse : 1,14 et 2.

(b) $\cos(-1) = \cos(1)$ Réponse : -1 et 1.

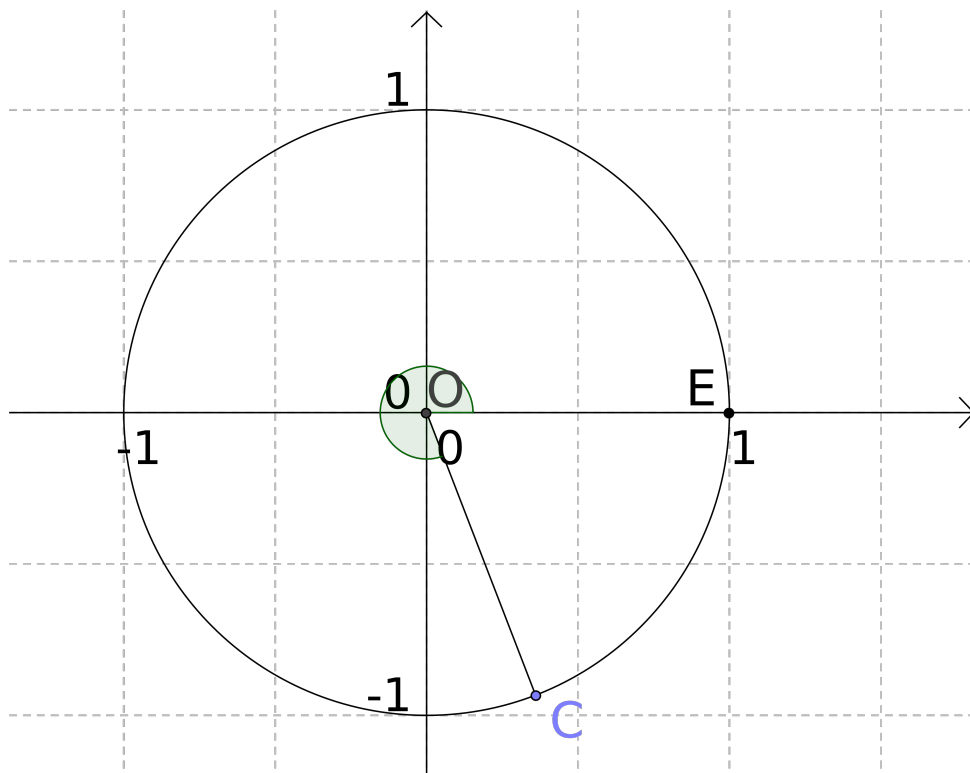
3. (Ex 21) Considérons le cosinus et le sinus d'un angle α dont l'amplitude est strictement comprise entre $\frac{3\pi}{4}$ et π .
Donne le signe de $\cos \alpha$, de $\sin \alpha$ et compare $|\cos \alpha|$ et $|\sin \alpha|$.



$$\cos \alpha < 0 \quad \sin \alpha > 0 \quad |\cos \alpha| > |\sin \alpha|$$

4. (Ex 24) Considérons le cosinus et le sinus d'un angle $\alpha \in \left] \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4} \right[$ (en radians).

Donne le signe de $\cos \alpha$, de $\sin \alpha$ et compare $|\cos \alpha|$ et $|\sin \alpha|$.



$$\cos \alpha > 0 \quad \sin \alpha < 0 \quad |\sin \alpha| > |\cos \alpha|$$

5. (Ex 22) On considère la relation $\sin(\alpha) = -0,8$ où $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Que vaut $\tan(\alpha)$?

α étant un angle du troisième quadrant, $\sin(\alpha) < 0$ et $\cos(\alpha) < 0$.

$$\sin^2(\alpha) = 0,64 \text{ donc } \cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha) = 0,36 \quad \cos(\alpha) = -0,6.$$

$$\text{Réponse : } \tan(\alpha) = \frac{-0,8}{-0,6} = \frac{4}{3}.$$

1.2 Angles associés

A retenir

Angles supplémentaires α et $\pi - \alpha$

$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \end{aligned}$

Angles opposés α et $-\alpha$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

Angles antisupplémentaires α et $\pi + \alpha$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

Réponse aux exercices

1. Valeurs remarquables et angles associés

Point	mesure	Symétrie	sin	cos	tan
F	$\frac{2\pi}{3}$	d'axe Oy	$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$	$\tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$
G	$\frac{3\pi}{4}$	d'axe Oy	$\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan \frac{3\pi}{4} = -1$
H	$\frac{5\pi}{6}$	d'axe Oy	$\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
I	$\frac{7\pi}{6}$	de centre O	$\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$	$\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan \frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
J	$\frac{5\pi}{4}$	de centre O	$\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan \frac{5\pi}{4} = 1$
K	$\frac{4\pi}{3}$	de centre O	$\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$	$\tan \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$
L	$\frac{5\pi}{3}$	d'axe Ox	$\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\tan \frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}$
M	$\frac{7\pi}{4}$	d'axe Ox	$\sin \frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan \frac{7\pi}{4} = -1$
N	$\frac{11\pi}{6}$	d'axe Ox	$\sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$	$\cos \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan \frac{11\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Nombres trigonométriques

1) $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$	7) $\operatorname{tg}(\frac{7\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$	13) $\cos(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$
2) $\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$	8) $\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	14) $\tan(\frac{11\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
3) $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$	9) $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	15) $\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
4) $\sin(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	10) $\tan(-\frac{2\pi}{3}) = \sqrt{3}$	16) $\cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
5) $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$	11) $\sin(-\frac{7\pi}{6}) = \frac{1}{2}$	17) $\tan(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
6) $\cos \frac{11\pi}{6} = \frac{1}{2}$	12) $\tan \frac{5\pi}{4} = 1$	18) $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. (Ex 25) Calcule $\cos\left(\frac{17\pi}{3}\right)$.

$$\cos\left(\frac{17\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

1.3 sin et cos de l'angle double

$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$ et

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

La dernière formule ressemble à la formule fondamentale

$$1 = \cos^2(x) + \sin^2(x).$$

En les additionnant, on obtient

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1.$$

Exercices

1. (Ex 22) On considère un angle α , exprimé en radians, qui vérifie les inégalités $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ et la relation $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \frac{1}{2}$.

Que vaut cet angle α (en radians) ?

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

$$\text{donc } \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos(2\alpha) = \frac{1}{2}.$$

D'autre part, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ donc $\pi < 2\alpha < 2\pi$.

$$2\alpha = -\frac{\pi}{3} \quad \alpha = -\frac{\pi}{6}$$

$$\text{Réponse : } \alpha = \frac{5\pi}{6}$$

2. Ex 23) Si x est un angle quelconque, quelle est, parmi les relations suivantes, celle qui est toujours vérifiée ?

(a) $\cos(x^2) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2$

(b) $\cos(x^2) = 2 \cos(x) \sin(x)$

(c) $\cos(x^2) = 2 \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1$

(d) $\cos(x^2) = 2 \left(\cos\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)^2 - 1$

Posons $t = x^2$ les relations deviennent formellement :

$$(a) \cos(t) = (\cos(\sqrt{x}))^2 - (\sin(\sqrt{x}))^2$$

$$(b) \cos(t) = 2 \cos(\sqrt{x}) \sin(\sqrt{x})$$

$$(c) \cos(t) = 2 \left(\cos\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) \right)^2 - 1$$

$$(d) \cos(t) = 2 \left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right)^2 - 1$$

Les trois premières relations sont inconnues dans la galaxie.

Pour la dernière, posons $t = 2x$.

$\cos(2x) = 2(\cos(x))^2 - 1$ qui est exacte et bien connue.

3. (Ex 24) Parmi les quatre expressions suivantes, laquelle est équivalente à $\cos^4(x) - \sin^4(x)$ pour tout réel x ?

$$(a) \cos(2x)$$

$$(b) \cos^2(x)$$

$$(c) \cos^2(2x)$$

$$(d) 2 \cos^2(x)$$

$$\begin{aligned} \cos^4(x) - \sin^4(x) &= (\cos^2(x) - \sin^2(x)) (\cos^2(x) + \sin^2(x)) = \\ \cos^2(x) - \sin^2(x) &= \cos(2x). \end{aligned}$$

1.4 Les fonctions sin, cos, tan

A retenir

Définition

Une fonction de l'ensemble A dans $\mathbb{R}$ est une relation qui, à chaque élément de A fait correspondre un nombre réel.

Notations

Une fonction est souvent notée f .

Un élément quelconque de A est souvent noté x .

Le nombre qui correspond à x est appelé “image de x ” et noté $f(x)$.

$$f : x \rightarrow f(x)$$

La flèche indique la dépendance fonctionnelle (une seule image pour un x donné).

Exemple

x	$f(x)$
1	-3
2	0
3	5
-1	-3
-2	0
0	-4
$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{4}$

Définitions

La fonction **sin** est la fonction qui à x , mesure en radians d’un angle orienté, associe **sin** x .

La fonction **cos** est la fonction qui à un nombre x associe le cosinus de l’angle orienté qu’il mesure en radians.

La fonction **tan** est la fonction qui à un nombre x associe la tangente de l’angle orienté qu’il mesure en radians.

Domaines

$$\text{dom}(\mathbf{sin}) = \mathbb{R}$$

$$\text{dom}(\mathbf{cos}) = \mathbb{R}$$

$$\text{dom}(\mathbf{tan}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Périodes

La période de la fonction **sin** est 2π : $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

La période de la fonction **cos** est 2π : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

La période de la fonction **tan** est π : $\tan(x + \pi) = \tan x$.

Graphiques

Les graphiques des 3 fonctions doivent être connus.

Réponse aux exercices

1. Pour la fonction sin,

(a) Maxima : $\frac{\pi}{2} + k.2\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(b) Racines : $k.\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(c) Le tableau de variation sera limité à une période.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	0

2. Donne les racines

(a) de **sin** : $k.\pi$, k entier

(b) de **cos** : $\frac{\pi}{2} + k.\pi$, k entier

(c) de **tan** : $k.\pi$, k entier

3. Quelle transformation

(a) la translation horizontale de $\frac{\pi}{2}$ unités.

(b) la translation horizontale de $-\frac{\pi}{2}$ unités.

(c) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

(d) (Ex 21) On donne le nombre x tel que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et vérifiant

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Que vaut $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$?

D'après la question précédente, $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ et donc $\sin x = 1$.

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ (cercle trigonométrique ou graphique).

Variante : utilisez l'angle antisupplémentaire $\cos\left(\pi + x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$ et conclure par la formule fondamentale.

1.5 Équations trigonométriques

A retenir

Deux $\sin$ sont égaux lorsque les angles sont égaux ou supplémentaires.

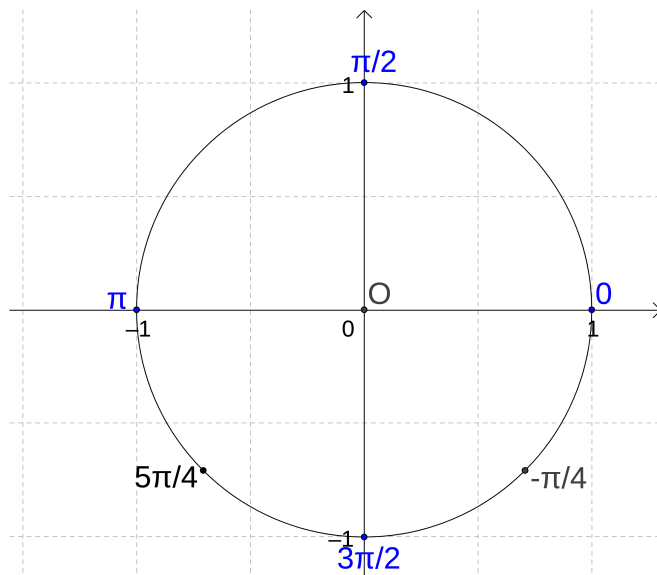
Deux $\cos$ sont égaux lorsque les angles sont égaux ou opposés.

Deux $\tan$ sont égales lorsque les angles sont égaux ou anticomplémentaires.

Réponse aux exercices

1. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

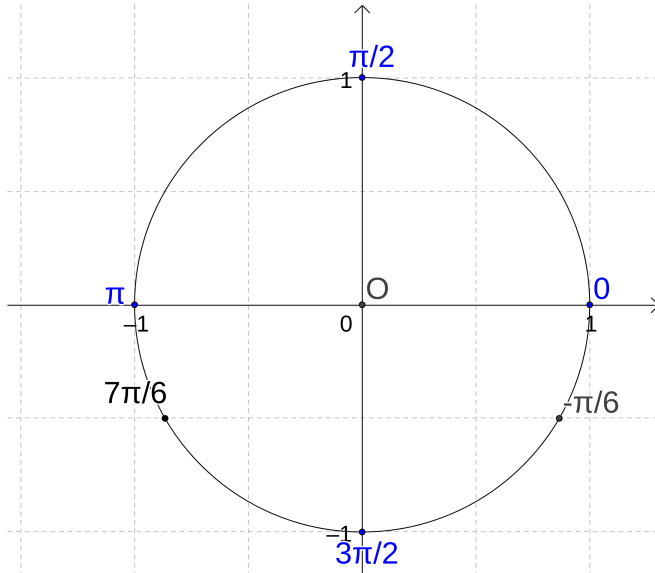
Réponse : $x = -\frac{\pi}{4} + k.2\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{4} + k.2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.



2. $2\sin x + 1 = 0$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

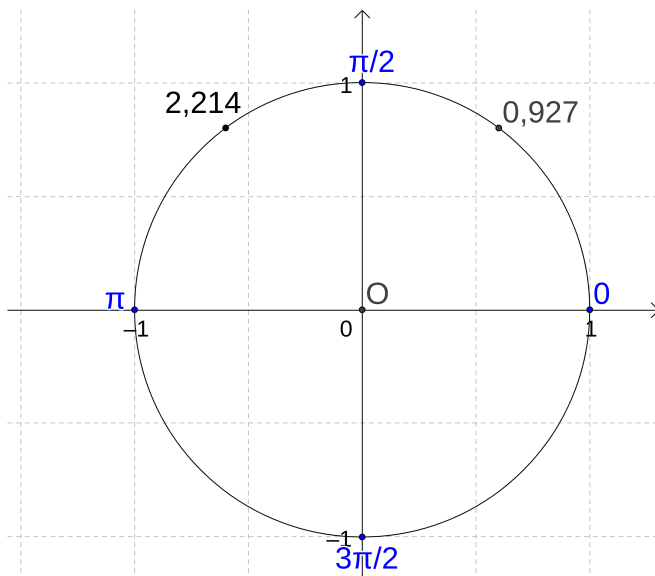
Réponse : $x = -\frac{\pi}{6} + k.2\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + k.2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.



3. $\sin x = 0,8$

$$\sin(x) = \sin(0,927)$$

Réponse : $x = 0,927$ ou $x = 2,214 + k.2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.



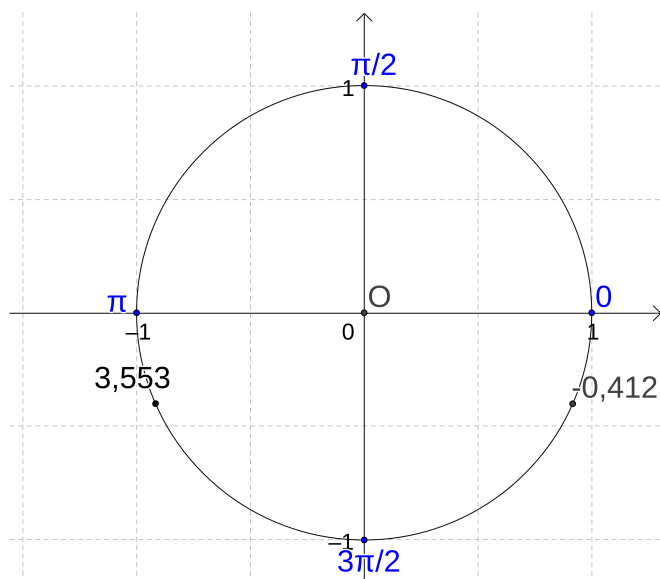
4. $\sin x = 3$

Pas de solution

5. $\sin x = -0,4$

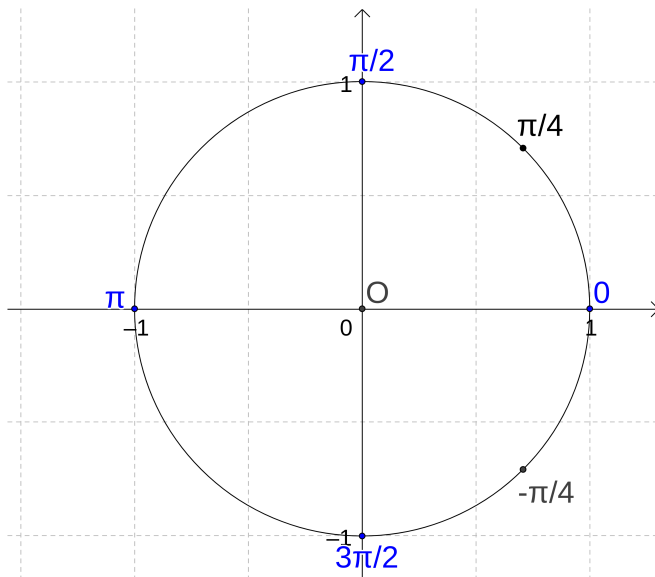
$$\sin(x) = \sin(-0,412)$$

Réponse : $x = -0,412$ ou $x = 3,553 + k.2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.



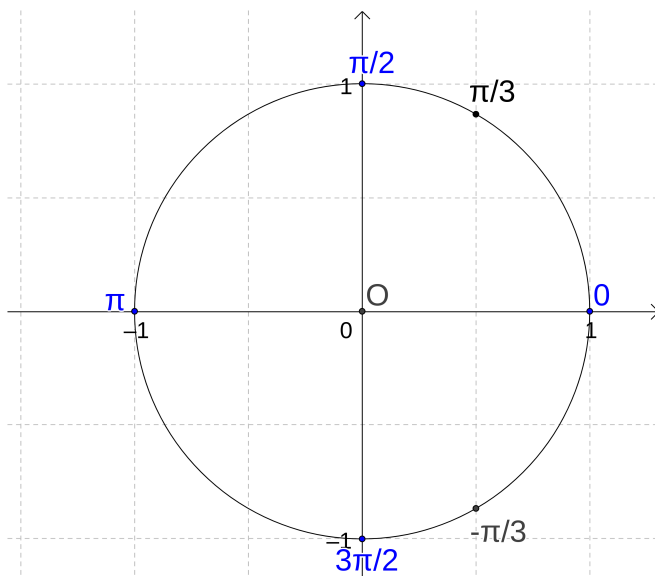
6. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Réponse : $x = \frac{\pi}{4} + k.2\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k.2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.



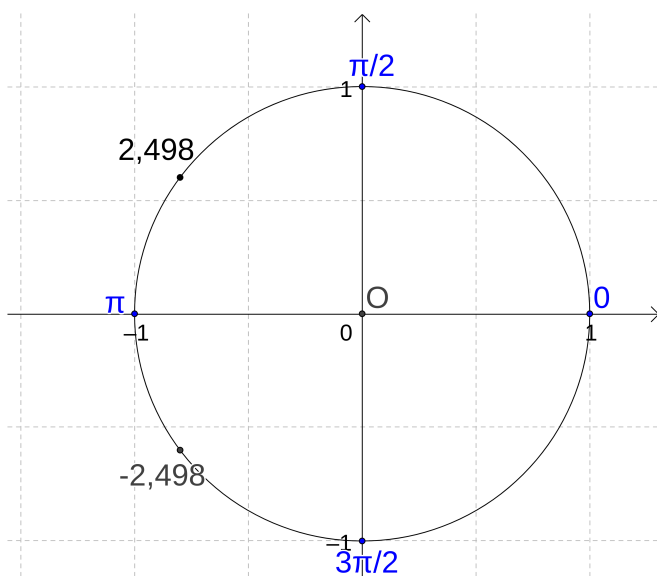
7. $2 \cos x - 1 = 0$

Réponse : $x = \frac{\pi}{3} + k.2\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + k.2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.



8. $\cos x = -0,8$ (avec 3 décimales exactes)

Réponse : $x = \pm 2,498 + k.2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

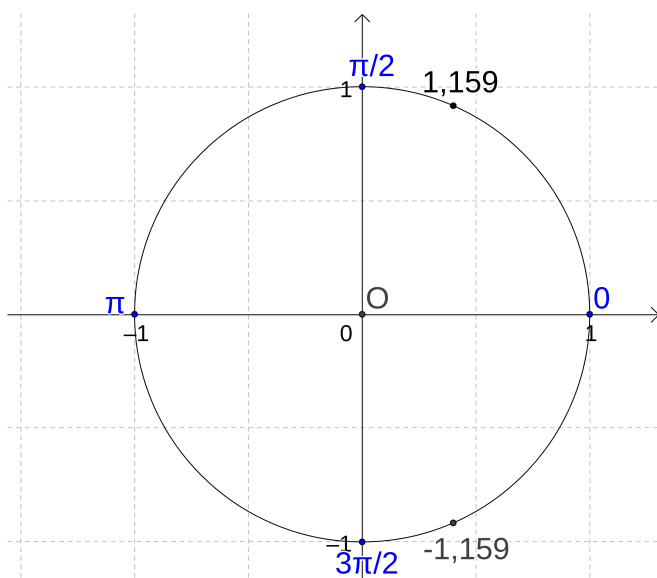


9. $\cos x = \pi$ (avec 3 décimales exactes)

Pas de solution

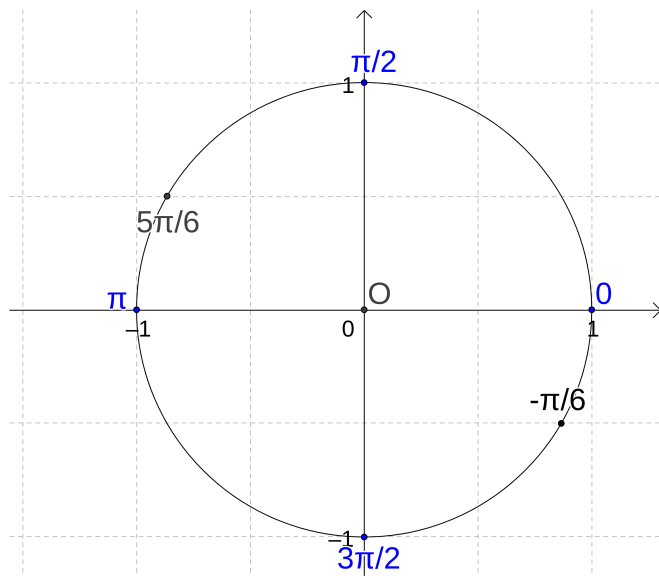
10. $\cos x = 0,4$ (avec 3 décimales exactes)

Réponse : $x = \pm 1,159 + k \cdot 2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.



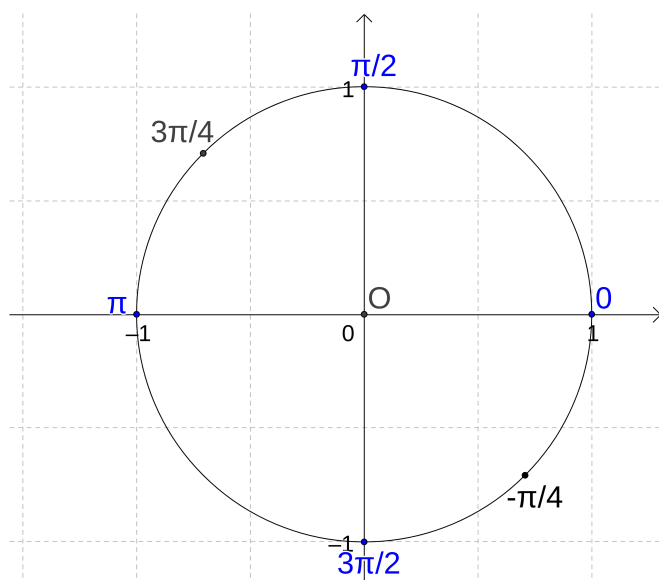
11. $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Réponse : $x = -\frac{\pi}{6} + k.2\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.



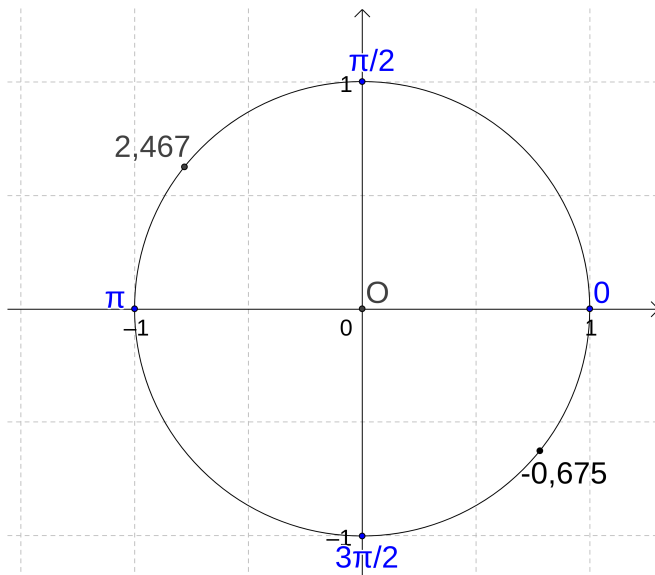
12. $\tan x + 1 = 0$

Réponse : $x = -\frac{\pi}{4} + k.2\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + k.2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.



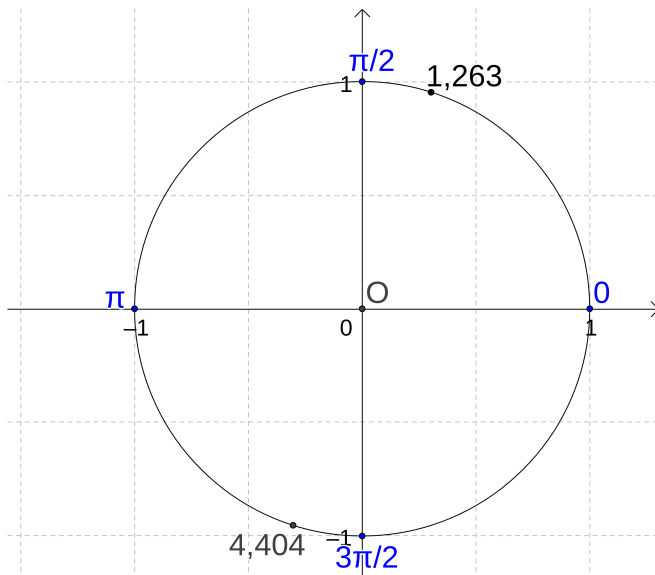
13. $\tan x = -0,8$ (avec 3 décimales exactes)

Réponse : $x = -0,675 + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.



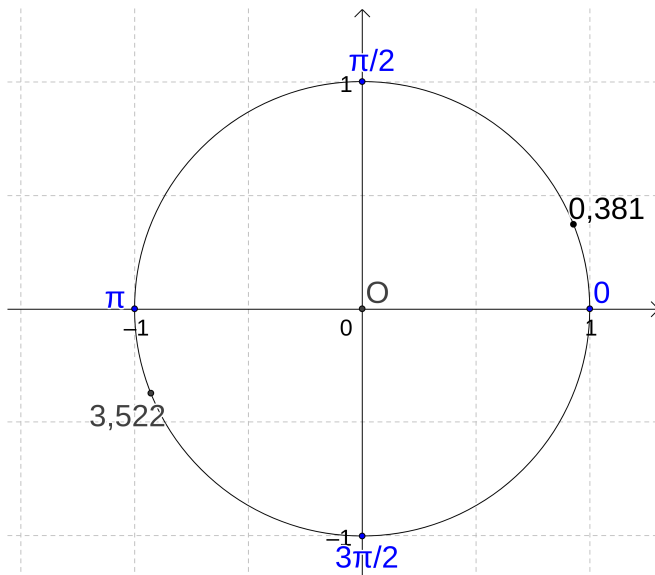
14. $\tan x = \pi$ (avec 3 décimales exactes)

Réponse : $x = 1,263 + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.



15. $\tan x = 0,4$ (avec 3 décimales exactes)

Réponse : $x = 0,381 + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.



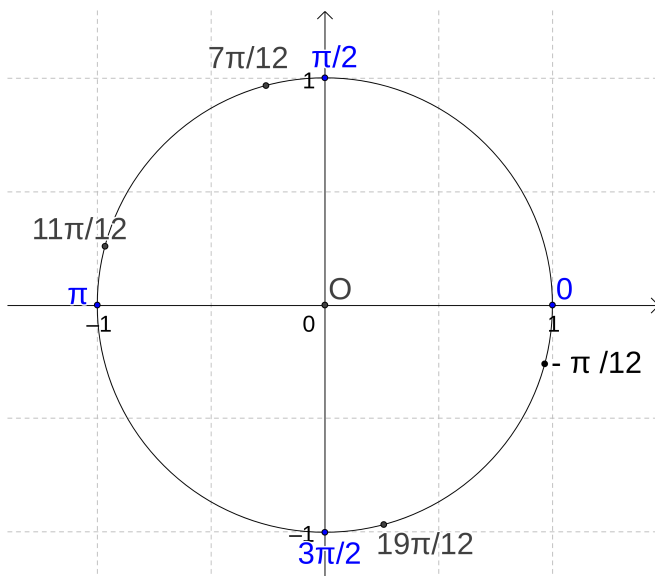
16. $2\sin(2x) + 1 = 0$

$$\sin(2x) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin(2x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$2x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

Réponse : $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.



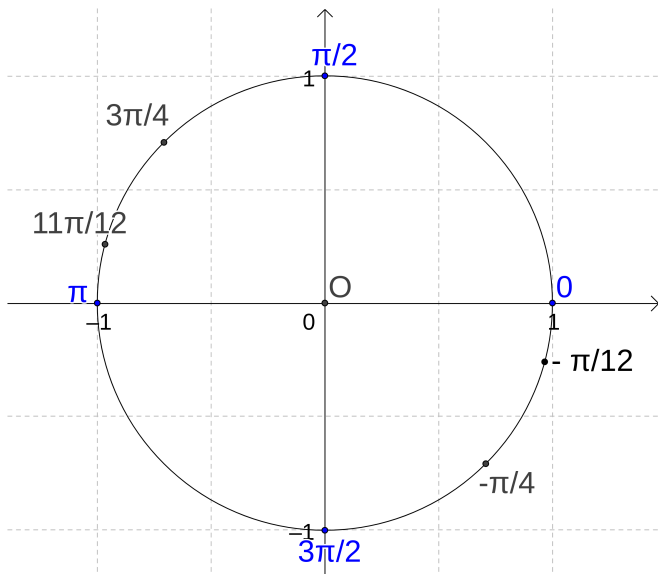
17. $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \sqrt{3}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{6} - 2x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{6} - 2x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$-2x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \text{ou} \quad -2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

Réponse : $x = -\frac{\pi}{12} - k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} - k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.



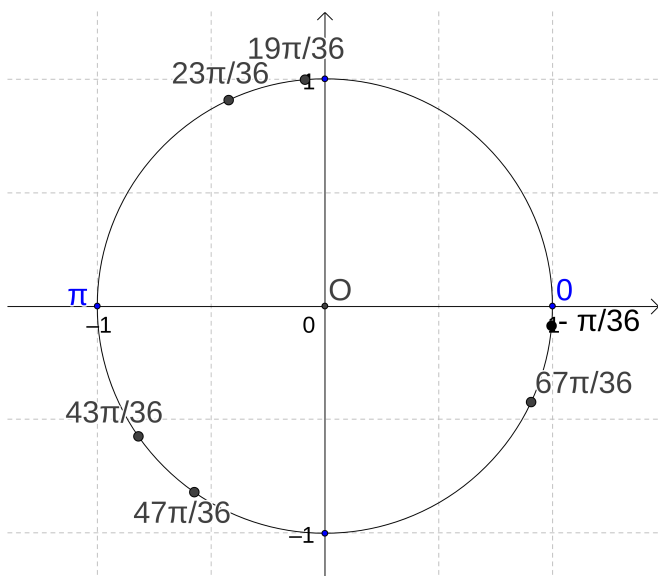
18. $\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = \sin(-\frac{\pi}{3})$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + k.2\pi \quad \text{ou} \quad 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{3} + k.2\pi$$

$$3x = -\frac{\pi}{12} + k.2\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \frac{19\pi}{12} + k.2\pi$$

Réponse : $x = -\frac{\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{19\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}$ $k \in \mathbb{Z}$.

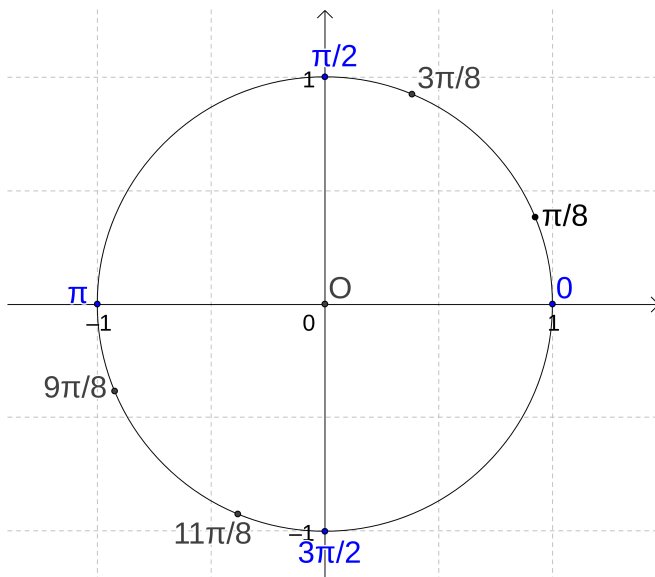


19. $\sqrt{2} \cdot \sin(2x) = 1$

$$\sin(2x) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + k.2\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{3\pi}{4} + k.2\pi$$

Réponse : $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.



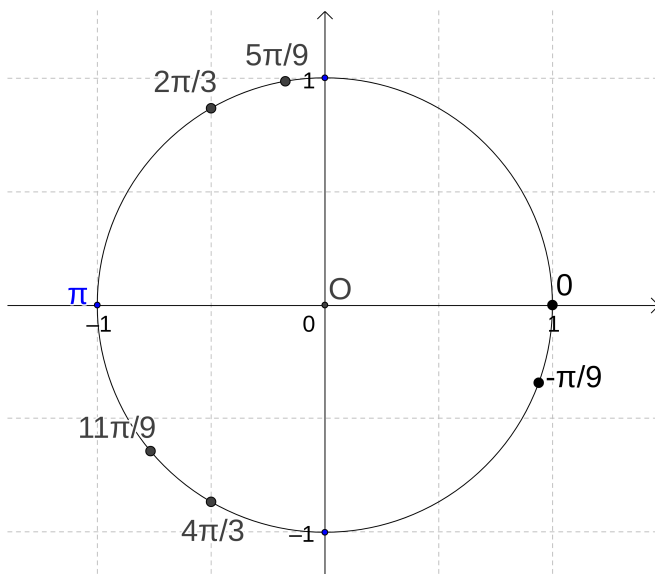
20. $2. \sin \left(3x + \frac{2\pi}{3} \right) = \sqrt{3}$

$$\sin \left(3x + \frac{2\pi}{3} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

$$3x + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k.2\pi \quad \text{ou} \quad 3x + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + k.2\pi$$

$$3x = -\frac{\pi}{3} + k.2\pi \quad \text{ou} \quad 3x = k.2\pi$$

Réponse : $x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$ ou $x = k\frac{2\pi}{3}$ $k \in \mathbb{Z}$.



21. (Ex 25) On considère l'équation, pour x réel :

$$\cos(x^2) + \sin(x^2) = 1$$

Dans les propositions suivantes, quel ensemble fait partie de l'ensemble des solutions de cette équation ?

(a) $\left\{ \sqrt{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{4}} : k = 0, 1, 2, \dots \right\}$

(b) $\left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} : k = 0, 1, 2, \dots \right\}$

(c) $\left\{ \sqrt{k\frac{\pi}{2}} : k = 0, 1, 2, \dots \right\}$

(d) $\mathbb{R}$

Certains nombres réels ne sont pas solutions.

Exemple : pour $x = 1 \cong \frac{\pi}{3}$, $\cos(x^2) \cong 0,5$ et $\sin(x^2) \cong 0,85$. $\mathbb{R}$ est donc exclu.

Posons $t = x^2$. $\cos(t) + \sin(t) = 1$ a des solutions typiques telles que

$\cos(t) = 1$ et $\sin(t) = 0$ ce qui donne $t = 2k\pi$ ou

$\cos(t) = 0$ et $\sin(t) = 1$ ce qui donne $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Réponse : $\left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} : k = 0, 1, 2, \dots \right\}$

Chapitre 2

Limites de fonctions

2.0 Prérequis

A retenir

Fonction

Une **fonction** est une relation qui, à chaque élément de l'ensemble A fait correspondre un nombre réel.

Notation : $f : A \rightarrow R : x \rightarrow f(x)$.

Autres définitions

A est le **domaine** de la fonction, c'est donc l'ensemble des x qui ont une image.

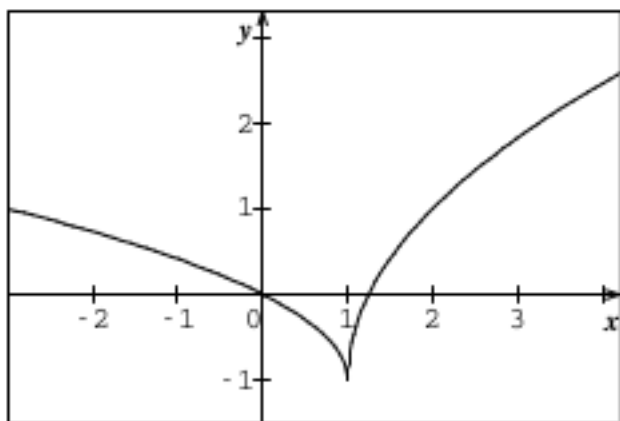
$f(x)$ est l'**image** de x .

$f(A)$ est l'ensemble des images. Il se note aussi $im f$.

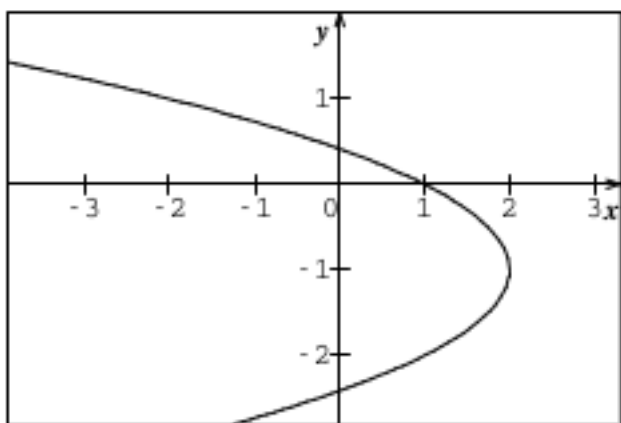
Le **graphe** de f est l'ensemble des couples $(x, f(x))$.

Il se note G ou tout simplement f .

Exemple de graphe d'une fonction



Contre-exemple de graphe d'une fonction



Domaine

Par définition, le domaine d'une fonction est l'ensemble des x qui ont une image.

Points d'intersection avec les axes

Avec l'axe Ox

Par définition, une racine d'une fonction est un x dont l'image est 0.

Graphiquement, une racine se trouve à un point d'intersection du graphe avec l'axe Ox .

Pour déterminer algébriquement les racines, il suffit donc de résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Avec l'axe Oy

Par définition, l'axe Oy a comme équation $x = 0$.

Si 0 a une image, le point d'intersection du graphe avec l'axe Oy est donc le point $(0, f(0))$.

Signe d'une fonction du second degré

$f : x \rightarrow ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) est une fonction du second degré.

Si $b^2 - 4ac < 0$

x	
$ax^2 + bx + c$	signe de a

Si $b^2 - 4ac = 0$

x		$-\frac{b}{2a}$	
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

Si $b^2 - 4ac > 0$

x		x_1		x_2	
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe contraire de a	0	signe de a

où x_1 et x_2 sont les racines ($x_1 < x_2$) de $ax^2 + bx + c$.

$b^2 - 4ac$ sera noté ρ .

En résumé : Signe de a partout, sauf entre les racines.

Réponse aux exercices

1.

a) $\text{dom } f = \mathbb{R}$ $G \cap Ox : (1; 0)$ $G \cap Oy : (0; 2)$	b) $\text{dom } f = \mathbb{R}$ $G \cap Ox :$ $(1; 0) \text{ et } \left(\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}; 0 \right)$ $G \cap Oy : (0; 3)$	c) $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $G \cap Ox : (2 \pm \sqrt{2}; 0)$ $G \cap Oy : (0; -1)$
d) $\text{dom } f = \left] \leftarrow; \frac{7}{3} \right]$ $G \cap Ox : \left(\frac{7}{3}; 0 \right)$ $G \cap Oy : (0; \sqrt{7})$	e) $\text{dom } f = \mathbb{R}$ $G \cap Ox : (-3; 0)$ $G \cap Oy : (0; 3)$	f) $\text{dom } f = [-2; 3]$ $G \cap Ox : (-2; 0) \text{ et } (3; 0)$ $G \cap Oy : (0; \sqrt{6})$
g) $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $G \cap Ox = \emptyset$ $G \cap Oy : \left(0; \frac{1}{2} \right)$	h) $\text{dom } f =]\leftarrow; 2[$ $G \cap Ox : (-2; 0)$ $G \cap Oy : (0; -2\sqrt{2})$	i) $\text{dom } f = \left[-\frac{5}{2}; \rightarrow \right[\setminus \{1; 2\}$ $G \cap Ox : \left(-\frac{5}{2}; 0 \right)$ $G \cap Oy : \left(0; \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$
j) $\text{dom } f = [4; 5[$ $G \cap Ox : (4; 0)$ $G \cap Oy = \emptyset$	k) $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ $G \cap Ox : (0; 0)$ $G \cap Oy : (0; 0)$	l) $\text{dom } f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ $G \cap Ox = (0; 0)$ $G \cap Oy : (0; 0)$

2.

a) $\text{dom } f = \mathbb{R}$ $G \cap Ox :$ $(0; 0) \text{ et } (-2; 0)$ $G \cap Oy : (0; 0)$	b) $\text{dom } f = \left[-\frac{1}{3}; 2 \right[\cup]5; \rightarrow[$ $G \cap Ox : \left(-\frac{1}{3}; 0 \right)$ $G \cap Oy : \left(0; \sqrt{\frac{1}{10}} \right)$	c) $\text{dom } f = \mathbb{R}$ $G \cap Ox : (1; 0) \text{ et } (2; 0)$ $G \cap Oy : (0; \sqrt[3]{2})$
d) $\text{dom } f = [-1; 1[$ $G \cap Ox : (-1; 0)$ $G \cap Oy : (0; 1)$	e) $\text{dom } f = [-1; 1] \setminus \{0\}$ $G \cap Ox = \emptyset$ $G \cap Oy = \emptyset$	f) $\text{dom } f =]\leftarrow; 1[\cup]2; 3]$ $G \cap Ox : (3; 0)$ $G \cap Oy : \left(0; \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$
g) $\text{dom } f =]\leftarrow; 2] \cup]5; \rightarrow[$ $G \cap Ox = (2; 0)$ $G \cap Oy : \left(0; \sqrt{\frac{2}{5}} \right)$	h) $\text{dom } f =]-3; 3[$ $G \cap Ox = \emptyset$ $G \cap Oy : (0; 1)$	i) $\text{dom } f =]5; \rightarrow[$ $G \cap Ox = \emptyset$ $G \cap Oy = \emptyset$

3. Effectue

(a) $\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = |\sqrt{5} - 1| = \sqrt{5} - 1$

$$(b) \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} = |\sqrt{5} - 3| = -(\sqrt{5} - 3) = 3 - \sqrt{5}$$

$$(c) \text{ (Ex 22) } \sqrt{(1 + \sqrt{5})^2} - \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |1 + \sqrt{5}| - |2 - \sqrt{5}| =$$

$$1 + \sqrt{5} + (2 - \sqrt{5}) = 3.$$

NB : Parmi les propositions, il faut choisir $2\sqrt{9} - 3 = 6 - 3 = 3$.

2.1 Limites de fonctions en $+\infty$

A retenir

Définitions

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

signifie que $f(x)$ devient aussi grand qu'on veut à condition que x soit suffisamment grand.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

signifie que $f(x)$ devient aussi petit qu'on veut à condition que x soit suffisamment grand.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

signifie que $f(x)$ devient aussi proche qu'on veut de b à condition que x soit suffisamment grand.

Dans tout ce chapitre, a , b , c désignent des nombres réels.

Exemples fondamentaux

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Réponse aux exercices

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 7x^2 - 5x + 2 = -\infty$$

$-x^3 + 7x^2 - 5x + 2$ devient aussi petit qu'on veut à condition que x soit assez grand.

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} = 1$$

$\frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$ devient aussi proche qu'on veut de 1 à condition que x soit assez grand.

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 1}{x^3 - 1} = 2$$

$\frac{2x^3 + 1}{x^3 - 1}$ devient aussi proche qu'on veut de 2 à condition que x soit assez grand.

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - x^2)(3x^3 - 2)}{x^6 - 5} = 0$$

$\frac{(1 - x^2)(3x^3 - 2)}{x^6 - 5}$ devient aussi proche qu'on veut de 0 à condition que x soit assez grand.

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6 + x^4 - 2x}{x^2 + 1} = +\infty$$

$\frac{x^6 + x^4 - 2x}{x^2 + 1}$ devient aussi grand qu'on veut à condition que x soit assez grand.

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + x - 2x^2}{1 + 3x} = -\infty$$

$\frac{3 + x - 2x^2}{1 + 3x}$ devient aussi petit qu'on veut à condition que x soit assez grand.

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 - x}$$

impossible !

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + x^2} = +\infty$$

$\sqrt{x + x^2}$ devient aussi grand qu'on veut à condition que x soit assez grand.

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 2} = 1$$

$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 2}$ devient aussi proche qu'on veut de 1 à condition que x soit assez grand.

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 4}{\sqrt{4x^2 - 5x}} = \frac{1}{2}$$

$\frac{x + 4}{\sqrt{4x^2 - 5x}}$ devient aussi proche qu'on veut de $\frac{1}{2}$ à condition que x soit assez grand.

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} = 0$$

$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ devient aussi proche qu'on veut de 0 à condition que x soit assez grand.

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$$

n'existe pas !

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty$$

$|x|$ devient aussi grand qu'on veut à condition que x soit assez grand.

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) = +\infty$$

$E(x)$ devient aussi grand qu'on veut à condition que x soit assez grand.

2.2 Limites de fonctions en $-\infty$

A retenir

Exemples fondamentaux

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Simplification de $\sqrt{x^2}$

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{ce qui donne toujours un nombre positif.}$$

Réponse aux exercices

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + 7x^2 - 5x + 2 = +\infty$$

$-x^3 + 7x^2 - 5x + 2$ devient aussi grand qu'on veut à condition que x soit assez petit.

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} = 1$$

$\frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$ devient aussi proche qu'on veut de 1 à condition que x soit assez petit.

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 1}{x^3 - 1} = 2$$

$\frac{2x^3+1}{x^3-1}$ devient aussi proche qu'on veut de 2 à condition que x soit assez petit.

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-x^2)(3x^3-2)}{x^6-5} = 0$$

$\frac{(1-x^2)(3x^3-2)}{x^6-5}$ devient aussi proche qu'on veut de 0 à condition que x soit assez petit.

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6+x^4-2x}{x^2+1} = +\infty$$

$\frac{x^6+x^4-2x}{x^2+1}$ devient aussi grand qu'on veut à condition que x soit assez petit.

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3+x-2x^2}{1+3x} = +\infty$$

$\frac{3+x-2x^2}{1+3x}$ devient aussi grand qu'on veut à condition que x soit assez petit.

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2-x} = +\infty$$

$\sqrt{2-x}$ devient aussi grand qu'on veut à condition que x soit assez petit.

8. (Ex 22) On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{3}{x} - 2 + \frac{4x^2-2}{x^2+1}$$

On constate que la fonction f admet une asymptote horizontale.

Quelle est la point d'intersection de cette asymptote avec l'axe Oy ?

$$\text{Constatons par nous-même : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x} - 2 + \frac{4x^2-2}{x^2+1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 0 - 2 + \frac{x^2(4 - \frac{2}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = 0 - 2 + \frac{4}{1} = 2 = b.$$

Réponse : $(0; 2)$.

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x+x^2} = +\infty$$

$\sqrt{x+x^2}$ devient aussi grand qu'on veut à condition que x soit assez petit.

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 2} = -1$$

$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}$ devient aussi proche qu'on veut de -1 à condition que x soit assez petit.

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 4}{\sqrt{4x^2 - 5x}}$$

$\frac{x+4}{\sqrt{4x^2-5x}}$ devient aussi proche qu'on veut de $-\frac{1}{2}$ à condition que x soit assez petit.

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} = 0$$

$\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ devient aussi proche qu'on veut de 0 à condition que x soit assez petit.

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$$

n'existe pas !

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty$$

$|x|$ devient aussi grand qu'on veut à condition que x soit assez petit.

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} E(x) = -\infty$$

$E(x)$ devient aussi petit qu'on veut à condition que x soit assez petit.

2.3 L'indétermination $\frac{\infty}{\infty}$

A retenir

Il n'y a aucune règle lorsque le numérateur et le dénominateur tendent vers ∞ .

On dit que $\frac{\infty}{\infty}$ est un cas d'indétermination.

2.4 Limites de fonctions lorsque $x \rightarrow a$

A retenir

Définitions

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

signifie que $f(x)$ devient aussi grand qu'on veut à condition que x soit suffisamment proche de a .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

signifie que $f(x)$ devient aussi petit qu'on veut à condition que x soit suffisamment proche de a .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

signifie que $f(x)$ devient aussi proche qu'on veut de b à condition que x soit suffisamment proche de a .

Réponse aux exercices

1. $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3x - 1 = 9$

$x^2 + 3x - 1$ est aussi proche qu'on veut de 9 à condition que x soit assez proche de 2.

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x - 1} = 0$

$\sqrt{x - 1}$ est aussi proche qu'on veut de 0 à condition que x soit assez proche de 1.

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$

$\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ est aussi proche qu'on veut de 2 à condition que x soit assez proche de 1.

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2+x}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2+x}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(2-x)} = \frac{1}{4}$$

$\frac{2+x}{4-x^2}$ est aussi proche qu'on veut de $\frac{1}{4}$ à condition que x soit assez proche de -2 .

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-3)}{(x+1)} = -1$$

$\frac{(x-1)(x-3)}{x^2-1}$ est aussi proche qu'on veut de -1 à condition que x soit assez proche de 1.

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 0} 1 + |x| = 1$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x+1)}{(x+3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+1)}{(x-1)} = \frac{1}{2}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x^3 - 3x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3x-5)}{(x+1)(x^2 - 4x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x-5)}{(x^2 - 4x + 4)} = -\frac{8}{9}$$

$$9. \text{ (Ex 24)} \quad \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+3}{x^3+27} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+3}{x^3+27} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{0}{0} \right)^{\frac{1}{3}} = \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x+3}{(x+3)(x^2-3x+9)} \right)^{\frac{1}{3}} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x^2-3x+9)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{Réponse : } \left(\frac{1}{(9+9+9)} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{15}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x^2 - 1} = 0$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sqrt{x^2 - 1} \text{ n'existe pas (domaine)}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin 3x = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \tan 2x = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

2.5 Limites à gauche et à droite

Réponse

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} E(x) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3^+} E(x) = 3$$

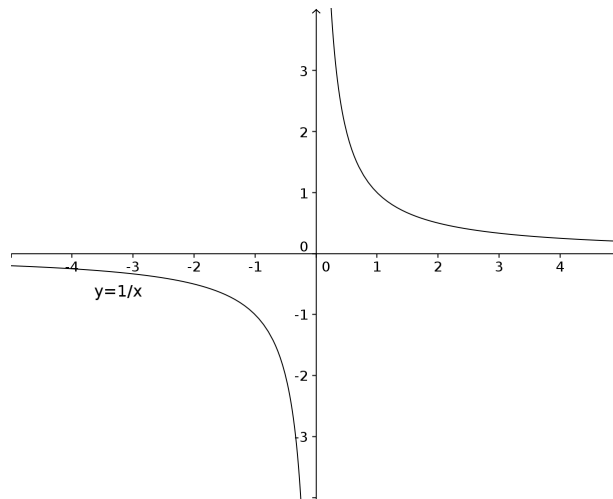
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

2.6 Limites infinies lorsque $x \rightarrow a$

A retenir

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

Signification : $\frac{1}{x}$ est aussi grand qu'on veut à condition que x soit suffisamment proche de 0 et plus grand que 0.



$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

Réponse aux exercices

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x} = -\frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -\frac{1}{x} = +\infty$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{3 - x^2}{1 - 2x} = \frac{2,75}{0} = \infty$$

x		$\frac{1}{2}$	
$1 - 2x$	+	0	-

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} \frac{3 - x^2}{1 - 2x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2}}} \frac{3 - x^2}{1 - 2x} = -\infty$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 3}{x^2 - 4x + 4} = \frac{7}{0} = \infty$$

x		2	
$x^2 - 4x + 4$	+	0	+

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{2x + 3}{x^2 - 4x + 4} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{2x + 3}{x^2 - 4x + 4} = +\infty$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 4 - x^2}{2x^3 - x^2 - 4x + 3} = \frac{-2}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 4 - x^2}{(x - 1)(2x^2 + x - 3)} = \frac{-2}{0} = \infty$$

x		$-\frac{3}{2}$		1	
$x - 1$	-	0	+	+	+
$2x^2 + x - 3$	+	0	-	0	+
$2x^3 - x^2 - 4x + 3$	-	0	-	0	+

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 4 - x^2}{2x^3 - x^2 - 4x + 3} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 4 - x^2}{2x^3 - x^2 - 4x + 3} = +\infty.$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 + 4x + 3}{3x - 4 - x^2} = \frac{8}{-2} = -4$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 6x - 7} = \frac{0}{0} \text{ Indéterminé!}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 6x - 7} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x + 5)}{(x + 1)(x - 7)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 5)}{(x - 7)} = -\frac{1}{2}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} \frac{5x^2 - 9x + 4}{-4x^2 + 7x - 3} = \frac{\frac{1}{16}}{0} = \infty$$

x		$\frac{3}{4}$		1	
$-4x^2 + 7x - 3$	-	0	+	0	-

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} \frac{5x^2 - 9x + 4}{-4x^2 + 7x - 3} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} \frac{5x^2 - 9x + 4}{-4x^2 + 7x - 3} = +\infty$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 6x^2}{x^2 + 2x - 8} = \frac{-16}{0} = \infty$$

x		-4		2	
$x^2 + 2x - 8$	+	0	-	0	+

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 6x^2}{x^2 + 2x - 8} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 6x^2}{x^2 + 2x - 8} = -\infty$$

2.7 Synthèse $\lim_{x \rightarrow a}$

A retenir

A la suite des exercices précédents, nous pouvons dire

$$\frac{\text{pas zéro ou zéro}}{\text{pas zéro}} = \text{réponse}$$

$$\frac{\text{zéro}}{\text{zéro}} = \text{indéterminé}$$

$$\frac{\text{pas zéro}}{\text{zéro}} = \infty$$

Attention! Il s'agit de règles mnémotechniques, pas de théorèmes mathématiques!

9. (Ex 21) On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 2}$

Quelles sont les équations définissant les asymptotes verticales de cette fonction? D'après la remarque précédente, on cherche $\frac{\text{pas zéro}}{\text{zéro}} = \infty$.

Les racines du dénominateur sont $\frac{-1 \pm 3}{2} = \frac{1}{-2}$ qui ne sont pas racines du numérateur.

Réponse : $x = 1$ et $x = -2$

2.8 Fonctions discontinues

A retenir

f est continue en $a \Leftrightarrow f(x)$ est aussi proche qu'on veut de $f(a)$
à condition de prendre x assez proche de a .

2.9 Théorème des valeurs intermédiaires

A retenir

Lorsqu'une fonction f est continue dans $[a; b]$, alors toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'un x de $[a; b]$, au moins.

Dans tous les exercices où seules les 4 opérations $+$ $-$ $\times$ $\div$ sont utilisées,

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ne sera possible que lors de la division par 0.

$x \rightarrow a$

Donc, si $\text{dom} f = \mathbb{R}$ il n'y a pas de limite infinie en $x = a$.

Chapitre 3

Dérivées, valeurs extrémales, graphiques

3.0 Prérequis

A retenir

Factorisation de $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Si $b^2 - 4ac < 0$ $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable

Si $b^2 - 4ac = 0$ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$, où x_1 est la racine.

Si $b^2 - 4ac > 0$ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

, où x_1 et x_2 sont les racines.

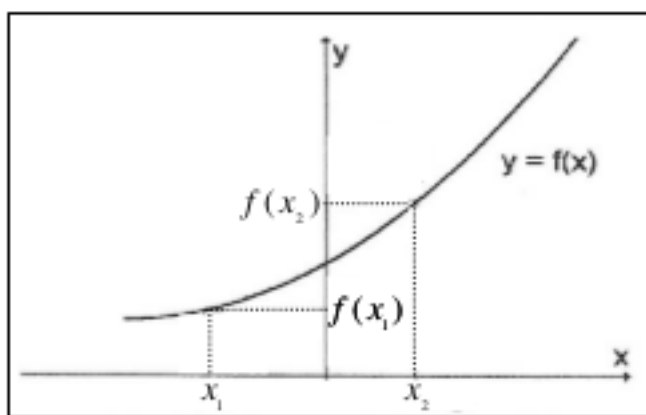
Variation d'une fonction

Par définition, une fonction strictement croissante est telle que plus x est grand, plus y est grand.

Autrement dit, une fonction est strictement croissante lorsque

si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$

où x_1 et x_2 sont deux nombres quelconques du domaine.

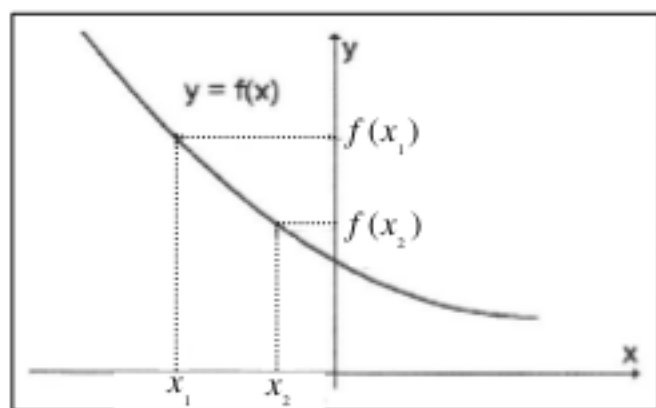


Par définition, une fonction strictement décroissante est telle que plus x est grand, plus y est petit.

Autrement dit, une fonction est strictement croissante lorsque

si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$

où x_1 et x_2 sont deux nombres quelconques du domaine.



Polynômes

Un polynôme est constitué de nombres réels, de la variable x (plus généralement $y, z, \dots$), d'additions et de multiplications.

Définition de la division

Diviser le polynôme $P(x)$ par le polynôme $D(x)$,

c'est trouver un polynôme $Q(x)$ et un polynôme $R(x)$ tels que

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

où le degré de $R(x)$ est strictement inférieur au degré de $D(x)$.

Division de $P(x)$ par $x-a$

En particulier, diviser le polynôme $P(x)$ par $(x - a)$,
c'est trouver le polynôme $Q(x)$ et le nombre R tels que
$$P(x) = (x - a).Q(x) + R.$$

Loi du reste

Le reste de la division du polynôme $P(x)$ par $(x - a)$ est donné par $P(a)$.

Conséquence

Si $P(a) = 0$, $P(x) = (x - a).Q(x)$ et donc $P(x)$ est factorisé.

Fonctions de référence

Les fonctions de référence nous serviront tout au long de l'étude des fonctions. Parmi les fonctions de référence se trouvent les fonctions du premier et du second degré que nous avons revues, sin, cos et tan que nous avons découvertes. Voici les autres fonctions de référence.

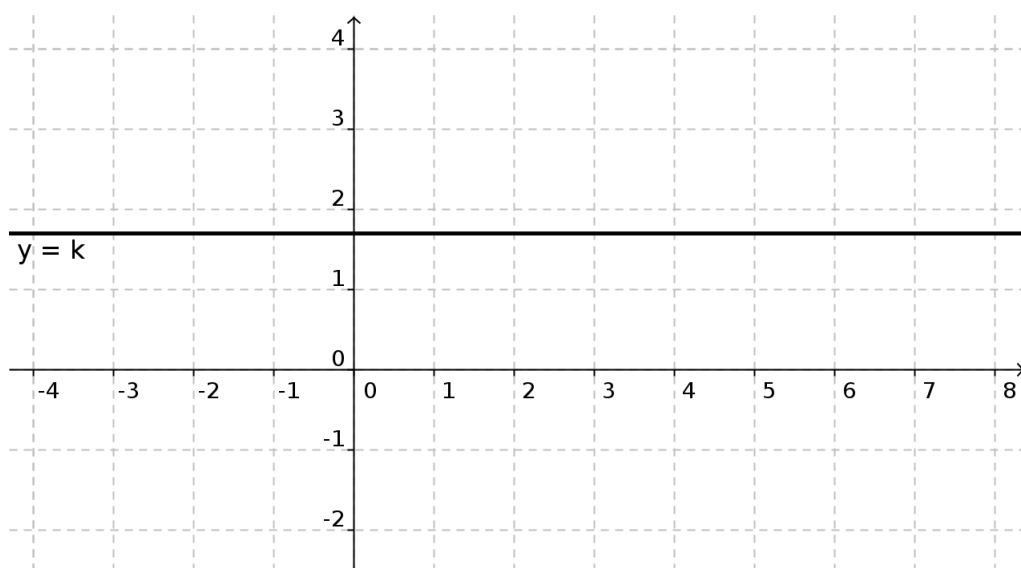
Fonctions constantes

$$f : x \rightarrow k$$

Domaine : $\mathbb{R}$

Ensemble des images : $\{k\}$

Racines : aucune (sauf si $k = 0$)



Fonction identique

Il s'agit d'un cas particulier de fonction du premier degré.

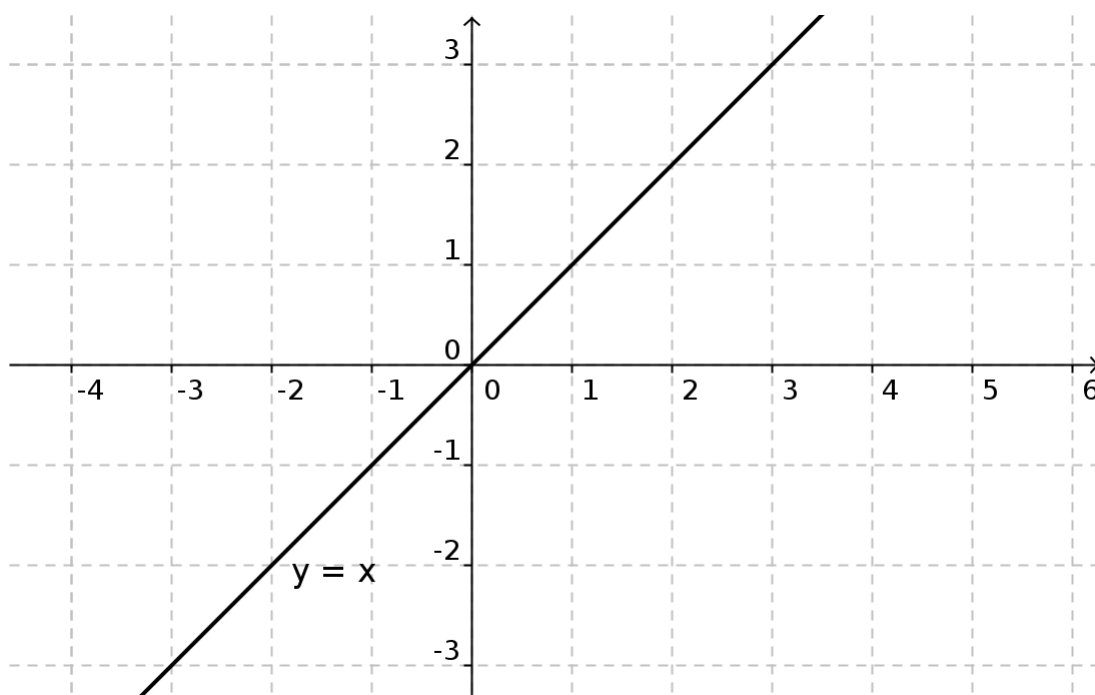
$$f : x \rightarrow x$$

Domaine : $\mathbb{R}$

Ensemble des images : $\mathbb{R}$

Racines : 0

Tableau de variation : $\begin{array}{c|c} x & \\ \hline y & \nearrow \end{array}$



Fonction “carré”

Il s'agit d'un cas particulier de fonction du second degré.

$$f : x \rightarrow x^2$$

Domaine : $\mathbb{R}$

Ensemble des images : $\mathbb{R}^+$

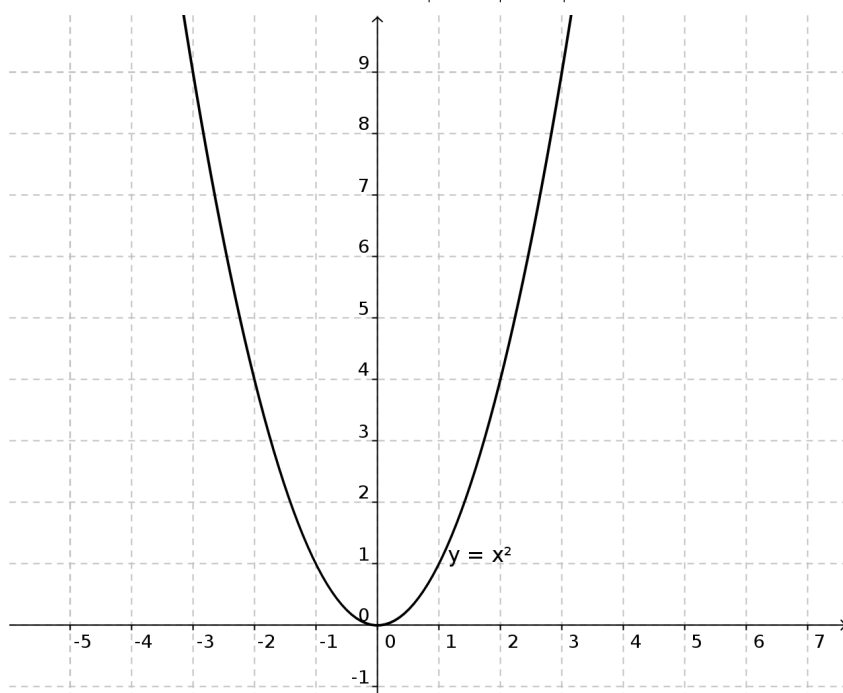
Racines : 0

Parité : $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$: cette fonction est paire

Tableau de variation :

x	0
y	m

↘ ↗



Fonction “cube”

$$f : x \rightarrow x^3$$

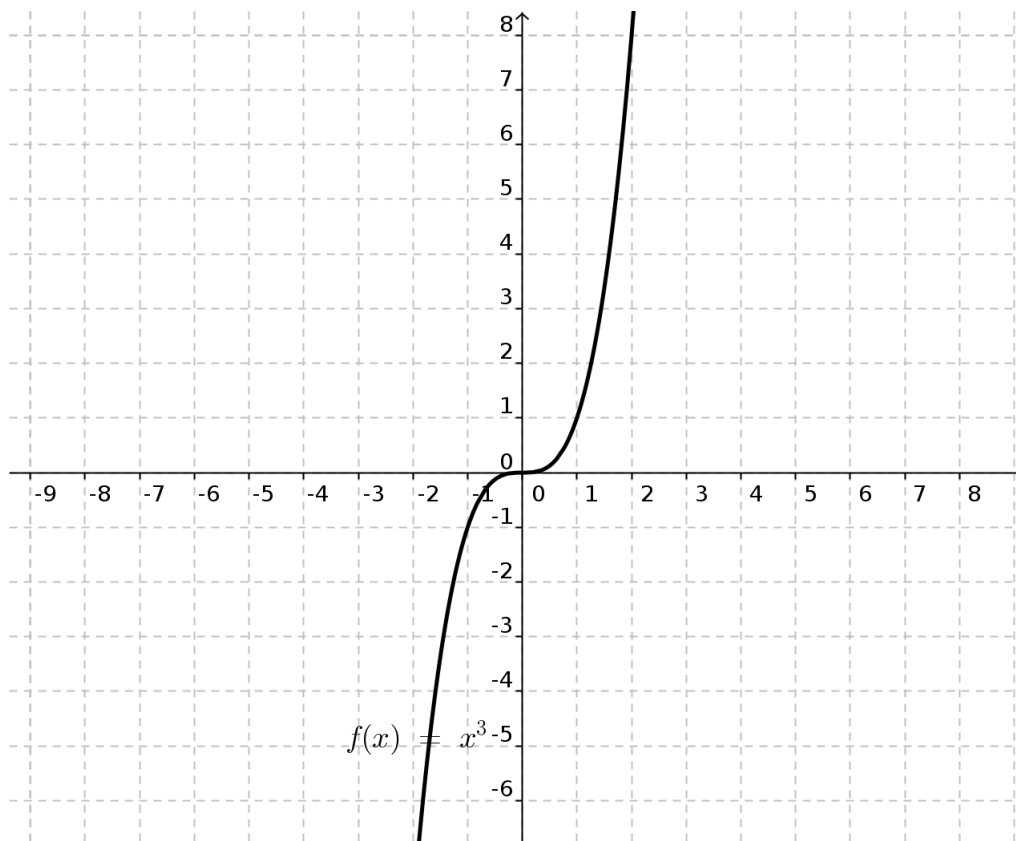
Domaine : $\mathbb{R}$

Ensemble des images : $\mathbb{R}$

Racines : 0

Parité : $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$: cette fonction est impaire

Tableau de variation : $\begin{array}{c|c} x & \\ \hline y & \nearrow \end{array}$



Fonction “radical”

$$f : x \rightarrow \sqrt{x}$$

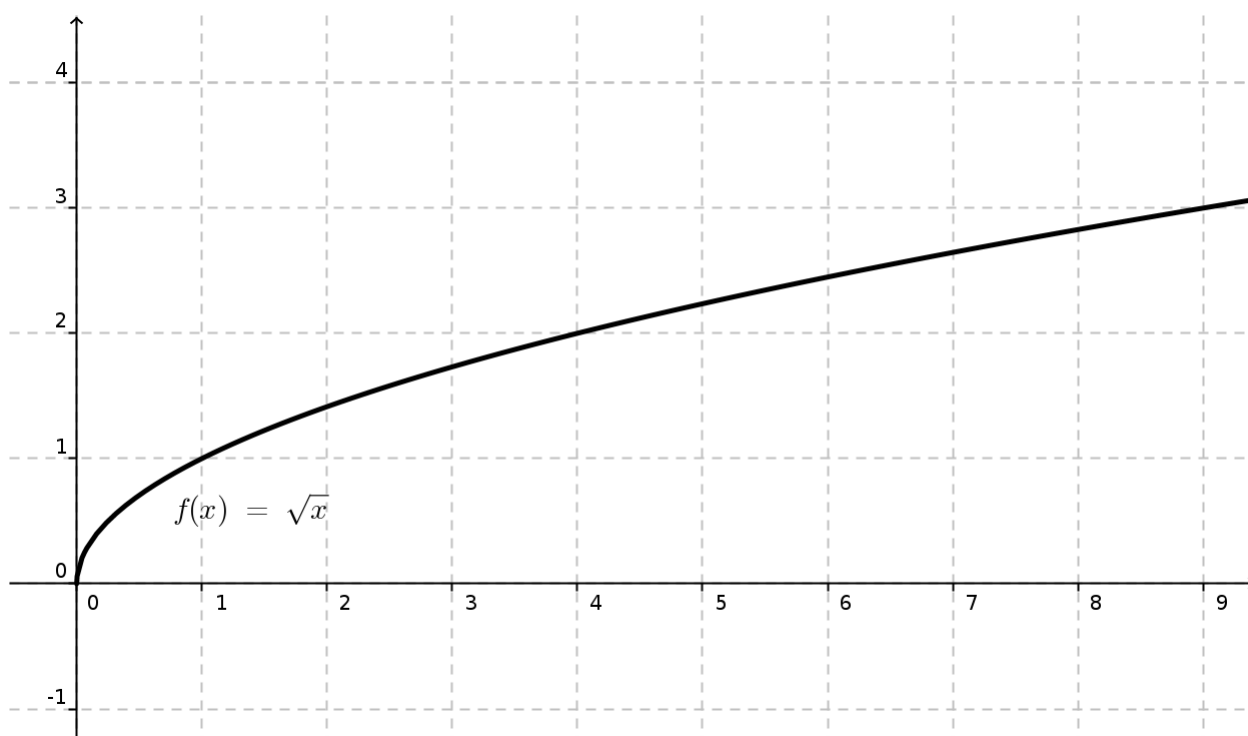
Domaine : $\mathbb{R}^+$

Ensemble des images : $\mathbb{R}^+$

Racines : 0

Parité : Ni paire ni impaire

Tableau de variation : $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \\ \hline y & m & \nearrow \end{array}$

**Racine cubique**

$$f : x \rightarrow \sqrt[3]{x}$$

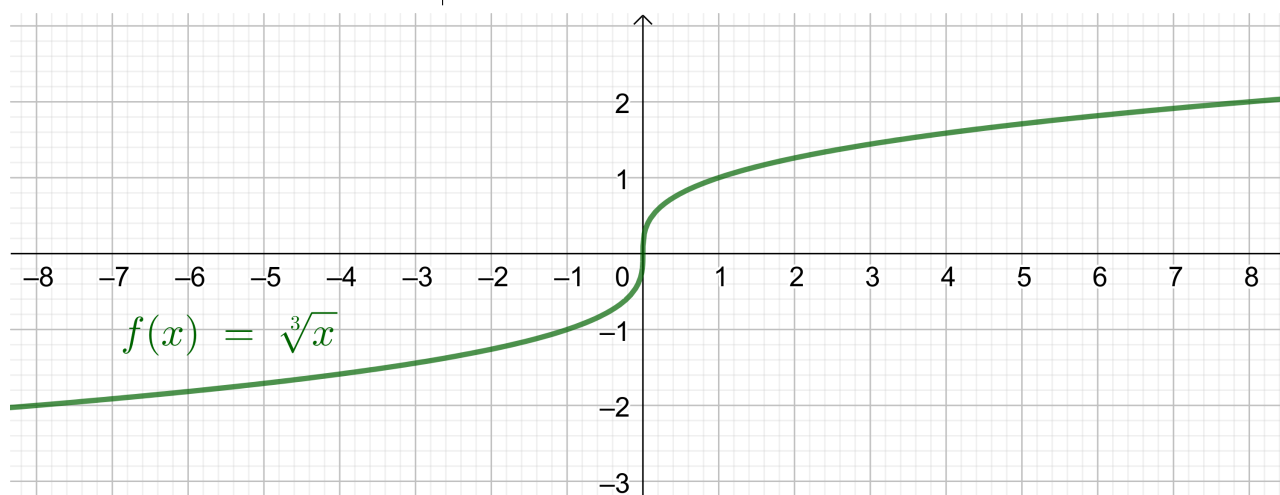
Domaine : $\mathbb{R}$

Ensemble des images : $\mathbb{R}$

Racines : 0

Parité : $f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$: cette fonction est impaire

Tableau de variation : $\begin{array}{c|c} x & y \end{array} \nearrow$

**Inverse**

$$f : x \rightarrow \frac{1}{x}$$

Domaine : $\mathbb{R}_0$

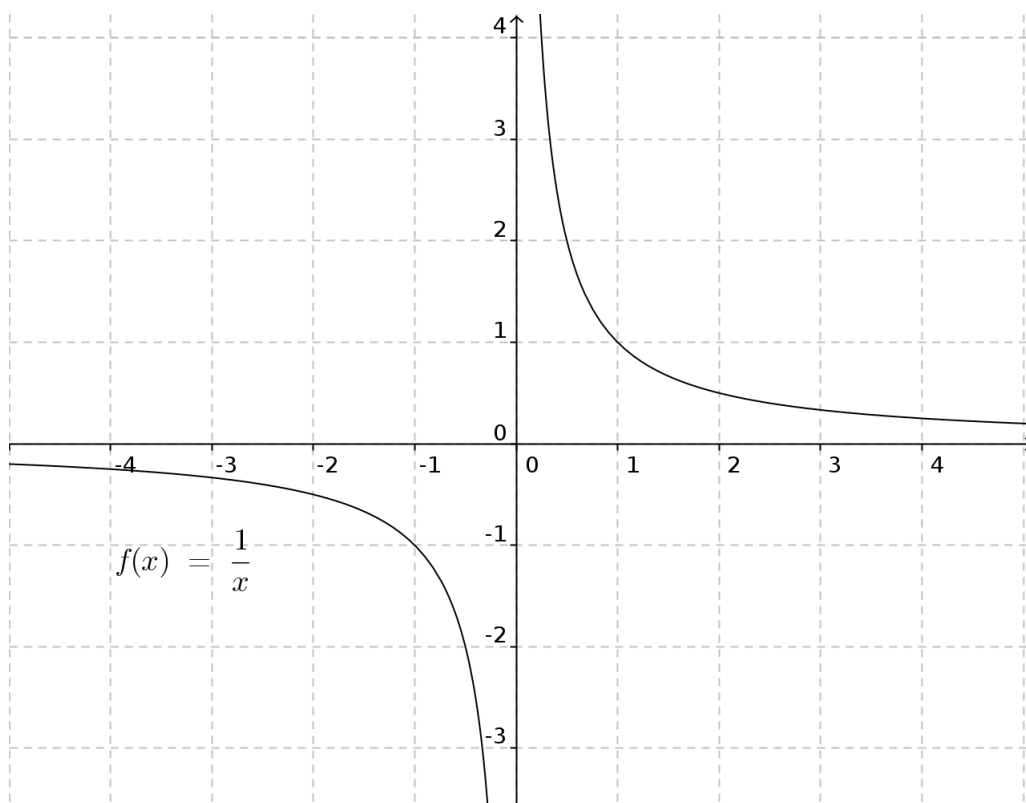
Ensemble des images : $\mathbb{R}_0$

Racines : aucun

Parité : $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$: cette fonction est impaire

Tableau de variation :

x		0	
y	$\searrow$		$\searrow$



Valeur absolue

$$f : x \rightarrow |x|$$

Domaine : $\mathbb{R}$

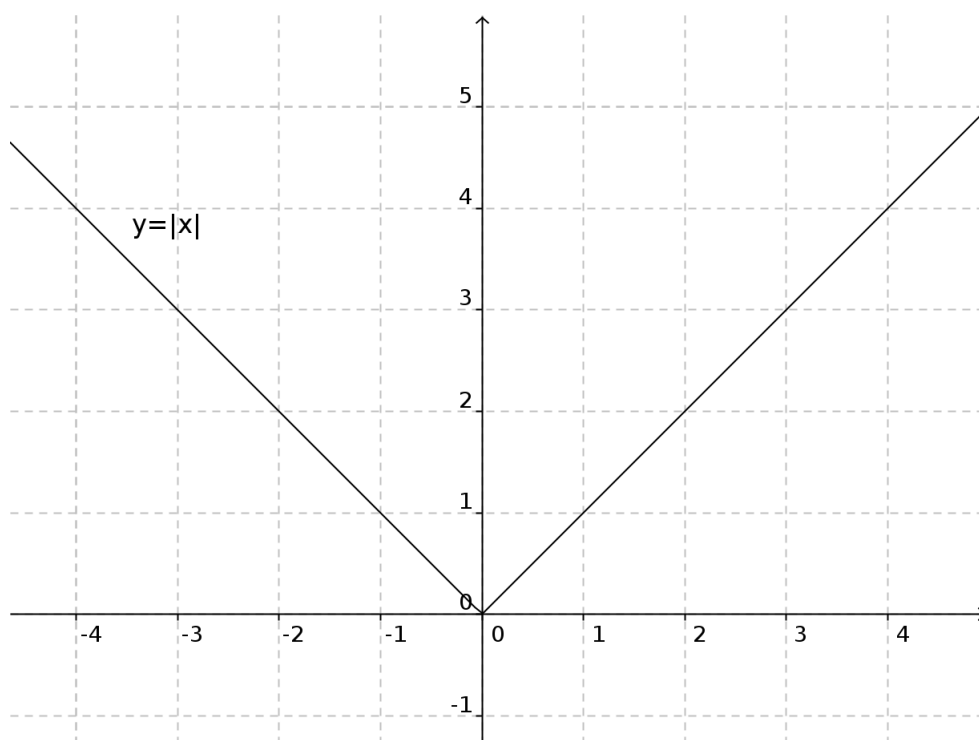
Ensemble des images : $\mathbb{R}^+$

Racines : 0

Parité : $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$: cette fonction est paire

Tableau de variation :

x		0	
y	$\searrow$	m	$\nearrow$



Partie entière¹

$E : x \rightarrow E(x)$, où $E(x)$

est un nombre entier

inférieur ou égal à x

strictement supérieur à $x - 1$.

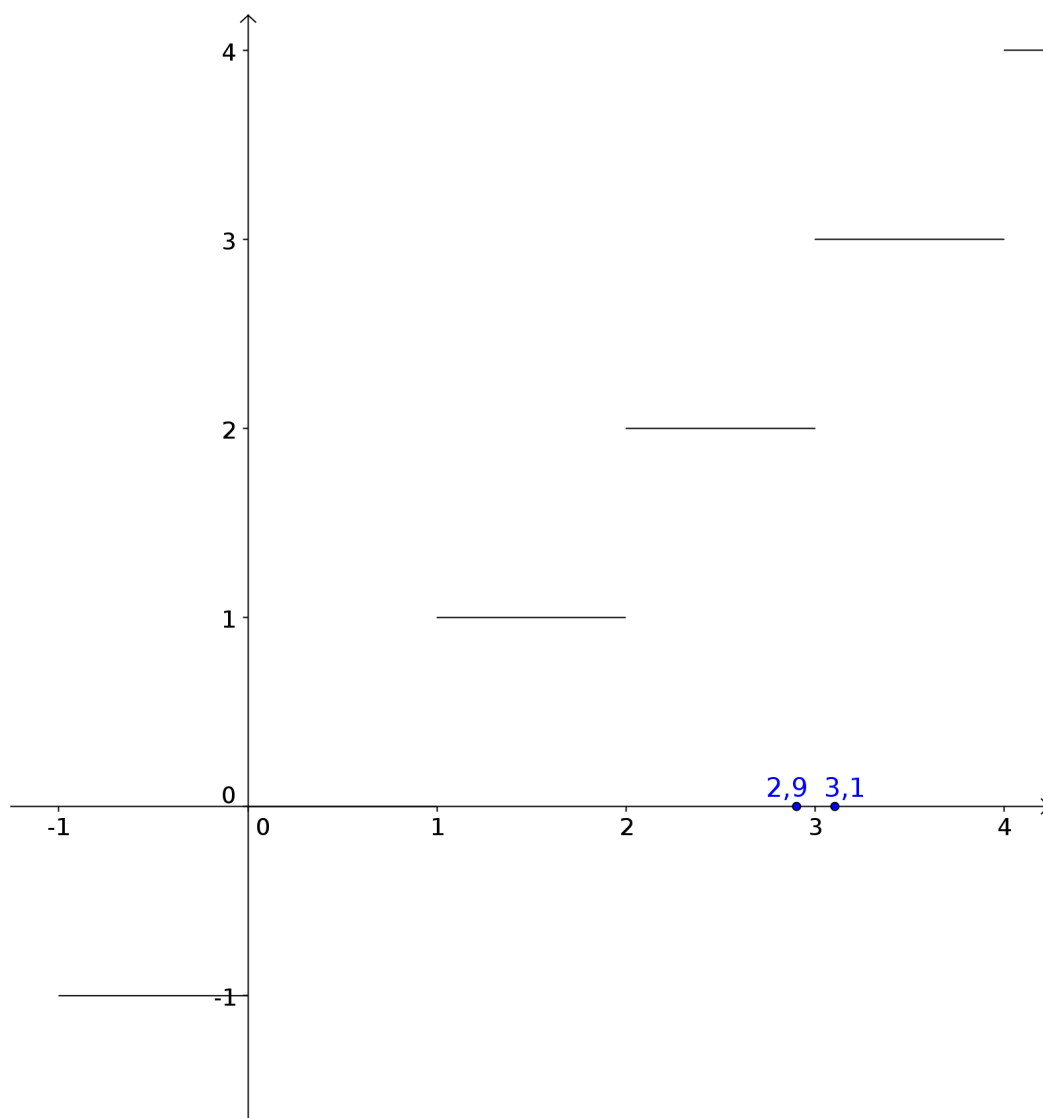
Domaine : $\mathbb{R}$

Ensemble des images : $\mathbb{Z}$

Racines : tous les nombres de $[0; 1[$

Parité : ni paire ni impaire

¹La définition a été simplifiée



Opérations sur les fonctions

Définition de la somme et de la différence de deux fonctions

f et g sont deux fonctions définies dans un domaine commun A .

$$f + g : A \rightarrow R : x \rightarrow f(x) + g(x)$$

$$f - g : A \rightarrow R : x \rightarrow f(x) - g(x)$$

Définition du produit et du quotient

f et g sont deux fonctions définies dans un domaine commun A .

$$f \cdot g : A \rightarrow R : x \rightarrow f(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{f}{g} : A \setminus \{\text{racines de } g\} \rightarrow R : x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$$

Définition de la composition de deux fonctions

Soit $f : A \rightarrow R$ et $g : f(A) \rightarrow R$.

$$g \circ f : A \rightarrow R : x \rightarrow g(f(x))$$

NB : $g \circ f$ se lit “ g de f ”.

Réponse aux exercices

$$1. 2x^2 - 3x - 9 = 2 \cdot (x - 3) \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)$$

$$2. -x^2 + 3x + 4 = -(x + 1) \cdot (x - 4)$$

$$3. -4x^2 + 4x - 1 = -(2x - 1)^2$$

4. Exemples :

$$(a) -4x^2 + 4x - 1$$

$$(b) -4x^3 + 1$$

$$(c) -\sqrt{14}$$

Contre-exemples

$$(a) -4x^2 + \frac{4}{x}$$

$$(b) -4\sqrt{x^3} + 1$$

$$(c) 2x + 3 = -14$$

$$5. 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = (x^2 + 4) \cdot (2x - 7) - 6x + 31$$

$$6. -4x^3 + 7x^2 - 2x + 19 = (x^2 - x + 1) \cdot (-4x + 3) + 5x + 16$$

$$7. P(-2) = 0. \text{ Oui}$$

$$9x^3 + 18x^2 - 4x - 8 = (x + 2) \cdot (9x^2 - 4)$$

$$8. -2x^3 + 7x + 5 = (x + 3) \cdot (-2x^2 + 6x - 11) + 38$$

9. Détermine le domaine de la fonction f .

$$(a) \text{ CE : } x \neq 1 \quad \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$(b) \text{ CE : } 4 - x \geq 0 \quad \begin{array}{c|c|c} x & & 4 \\ \hline 4 - x & + & 0 \end{array} \quad \text{dom } f =]-\infty; 4]$$

10. $\text{dom } f = [-1; 4[$

$\text{im } f = [-4; 5[$

11. $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f \cap Ox : \left(\frac{3}{2}; 0\right)$

$f \cap Oy : (0; 3)$

12. Pour la fonction f représentée,

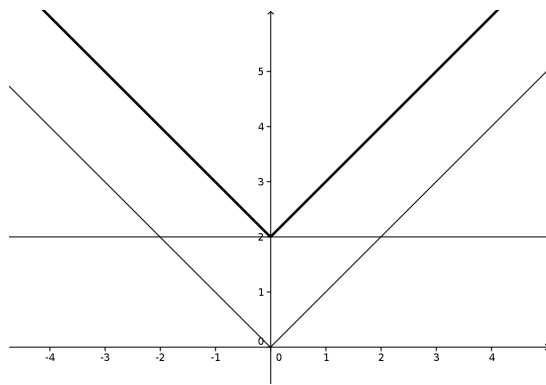
$\text{dom } f = \mathbb{R}$

$\text{im } f =]-\infty; 2, 8]$

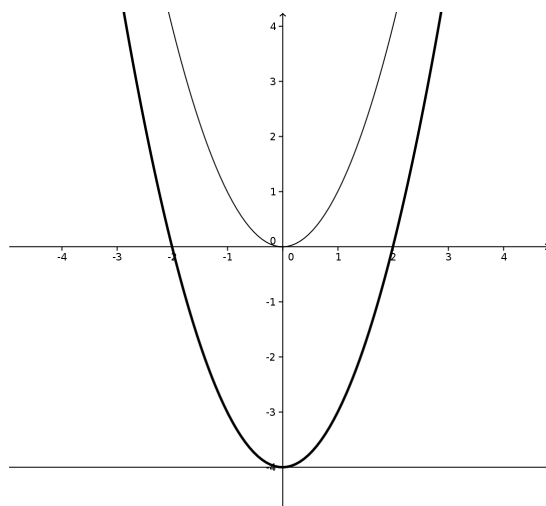
$f \cap Ox : (-1; 0) \text{ et } (3; 0)$

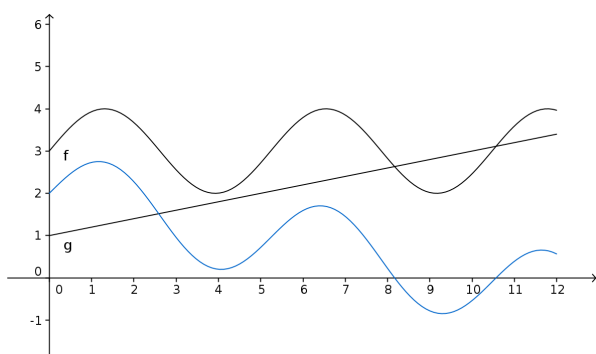
$f \cap Oy : (0; 2)$

13.

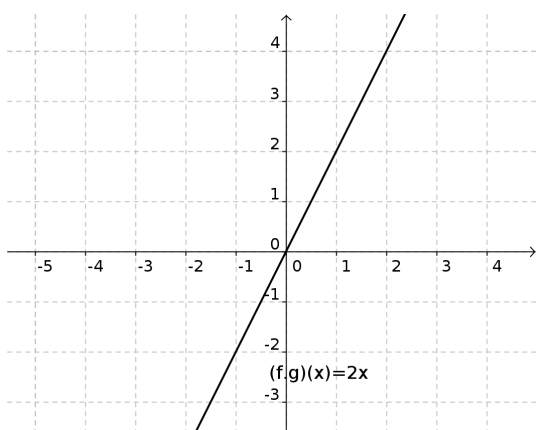


14.

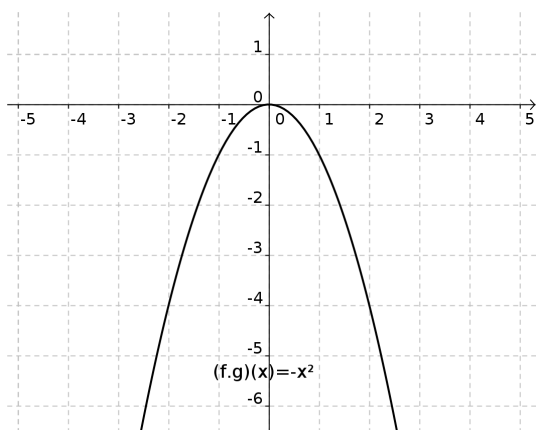




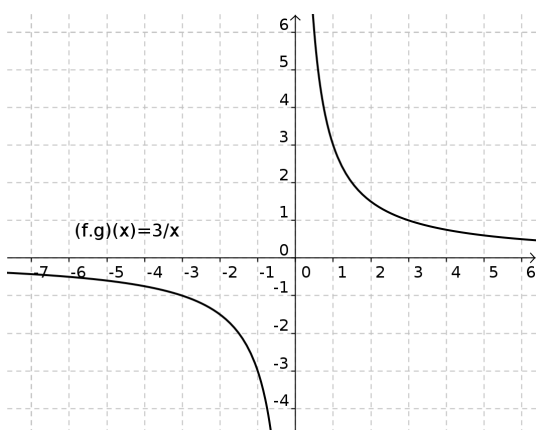
15.



16.



17.



18.

19. a) $\text{dom } f = \mathbb{R}^+$ $\text{dom } g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$f \circ g(x) = \sqrt{\frac{1}{x-3}} \quad \text{dom}(f \circ g) =]3; \rightarrow[$$

$$\mathbb{R}^+ \setminus \{9\}$$

b) $\text{dom } f = \mathbb{R}$ $\text{dom } g = \mathbb{R}$

$$g \circ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-3} \quad \text{dom}(g \circ f) =$$

$$f \circ g(x) = 4x^2 + 5 \quad \text{dom}(f \circ g) = \mathbb{R} \quad \mathbf{g} \circ f(x) = (4x + 5)^2 \quad \text{dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$$

$$\mathbf{c)} \quad \text{dom } f = \mathbb{R}_0 \quad \text{dom } g = \mathbb{R}$$

$$f \circ g(x) = \frac{1}{1-2x} \quad \text{dom}(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \quad \mathbf{g} \circ f(x) = 1 - \frac{2}{x} \quad \text{dom}(g \circ f) = \mathbb{R}_0$$

$$\mathbf{d)} \quad \text{dom } f = [-1; \rightarrow[\quad \text{dom } g = \mathbb{R}$$

$$f \circ g(x) = \sqrt{2x+4} \quad \text{dom}(f \circ g) = [-2; \rightarrow[\quad \mathbf{g} \circ f(x) = 3 + 2\sqrt{x+1} \quad \text{dom}(g \circ f) = [-1; \rightarrow[$$

$$\mathbf{e)} \quad \text{dom } f =]\leftarrow; -2] \cup [2; \rightarrow[\quad \text{dom } g = \mathbb{R}$$

$$f \circ g(x) = \sqrt{4x^2 + 12x + 5} \quad \text{dom}(f \circ g) = \left] \leftarrow; -\frac{5}{2} \right] \cup \left[-\frac{1}{2}; \rightarrow[$$

$$\mathbf{g} \circ f(x) = 3 + 2\sqrt{x^2 - 4} \quad \text{dom}(g \circ f) =]\leftarrow; -2] \cup [2; \rightarrow[$$

$$\mathbf{20. a)} \quad g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = 1 - x$$

$$\mathbf{b)} \quad g(x) = \sqrt{x} \text{ et } h(x) = 2 - x$$

$$\mathbf{c)} \quad g(x) = \sin x \text{ et } h(x) = 3x$$

$$\mathbf{d)} \quad g(x) = \cos x \text{ et } h(x) = 5x + 2$$

$$\mathbf{e)} \quad g(x) = x^3 \text{ et } h(x) = 3x + 2$$

$$\mathbf{f)} \quad g(x) = \sqrt{x} \text{ et } h(x) = x^2 - 1$$

$$\mathbf{g)} \quad g(x) = |x| \text{ et } h(x) = 4 - x^2$$

21. Pour la fonction f

$$\text{dom } f = [-5; 5]$$

$$\text{im } f = [-1; 1, 6]$$

f est strictement croissante sur $[-2; 1] \cup [4; 5]$

f est strictement décroissante sur $[-5; -2] \cup [3; 4]$

f est constante sur $[1; 3]$

22. Dresse le tableau de variation des fonctions représentées ci-dessous.

x	-4		-2		0		2		4		x	-4,5		-2		0		2
$f(x)$	3,5	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$	m_2	$\nearrow$	4,5		$f(x)$	2	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	5,5

x		-1	
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

x	-6		-5		-3		-2		1		3		4		6
$f(x)$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	--	M	$\searrow$	m_2	///	2	$\searrow$	0

23. On étudie l'efficacité (en pourcentage) d'un gel à laver en fonction de la température de l'eau utilisée.

(a) 40°

(b) 28° et 50°

(c) $[24^\circ; 56^\circ]$

$$(d) \begin{array}{c|c|c|c|c|c} t & 0 & & 40 & & 100 \\ \hline E(t) & 22 & \nearrow & M & \searrow & 7 \end{array}$$

24. Étudie le signe de

$$(a) \begin{array}{c|c|c|c} x & & \frac{7}{3} & \\ \hline 3x-7 & - & 0 & + \end{array}$$

$$(b) \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & & 2 & & 3 & \\ \hline x^2-5x+6 & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$$(c) \begin{array}{c|c|c|c} x & & \frac{4}{3} & \\ \hline 4-3x & + & 0 & - \end{array}$$

$$(d) \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & & -6 & & 1 & \\ \hline -x^2-5x+6 & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$$

$$(e) \begin{array}{c|c} x & \\ \hline x^2-x+6 & + \end{array}$$

$$(f) \begin{array}{c|c|c|c} x & & 2 & \\ \hline -x^2+4x-4 & - & 0 & - \end{array}$$

$$(g) \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} x & & 2 & & \frac{7}{3} & & 3 & \\ \hline x^2-5x+6 & + & 0 & - & - & - & 0 & + \\ 3x-7 & - & - & - & 0 & + & + & + \\ \hline \frac{x^2-5x+6}{3x-7} & - & 0 & + & | & - & 0 & + \end{array}$$

$$(h) \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & & -3 & & -2 & \\ \hline x^2+5x+6 & + & 0 & - & 0 & + \\ x^2+1 & + & + & + & + & + \\ \hline \frac{x^2+5x+6}{x^2+1} & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$$(i) \begin{array}{c|c|c|c} x & & 1 & \\ \hline x-1 & - & 0 & + \\ 2x^2+x+1 & + & + & + \\ \hline 2x^3-x^2-1 & - & 0 & + \end{array}$$

$$(j) \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & & -1 & & 1 & \\ \hline x+1 & - & 0 & + & + & + \\ x-1 & - & - & - & 0 & + \\ \hline x^2+x+1 & + & + & + & + & + \\ x^4+x^3-x-1 & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$$(k) \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & & -\frac{6}{5} & & 1 & \\ \hline 5x+6 & - & 0 & + & + & + \\ x^2-2x+1 & + & + & + & 0 & + \\ \hline \frac{5x+6}{x^2-2x+1} & - & 0 & + & | & + \end{array}$$

3.1 A quoi sert la dérivée d'une fonction ?

A retenir

La dérivée f' de la fonction f est une fonction qui indique comment f varie.

Réponse à l'exercice

Sachant que la dérivée de $f(x) = -x^2 + 3x - 7$ est $f'(x) = -2x + 3$, dresse le tableau de variation de f .

x		$\frac{3}{2}$	
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$

Maximum en $x = \frac{3}{2}$.

3.2 Sécantes et tangente

A retenir

Définitions

- $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

C'est la pente de la tangente au point d'abscisse x .

- La fonction f' est appelée dérivée de la fonction f .

3.3 Dérivée des fonctions de référence

A retenir

1. Si $f(x) = k$ (constante) alors $f'(x) = 0$.

En bref, $(k)' = 0$.

2. Si $f(x) = x$ (identique) alors $f'(x) = 1$. En bref, $\boxed{(x)' = 1}$.

3. Si $f(x) = x^2$ (carré) alors $f'(x) = 2x$. En bref, $\boxed{(x^2)' = 2x}$.

4. Si $f(x) = \frac{1}{x}$ (inverse) alors $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. En bref, $\boxed{(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}}$.

5. Si $f(x) = \sqrt{x}$ (radical) alors $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. En bref, $\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$.

6. Si $f(x) = x^n$ (puissance n) alors $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. En bref, $\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}$.

7. La dérivée de la fonction $\sin$ est la fonction $\cos$.

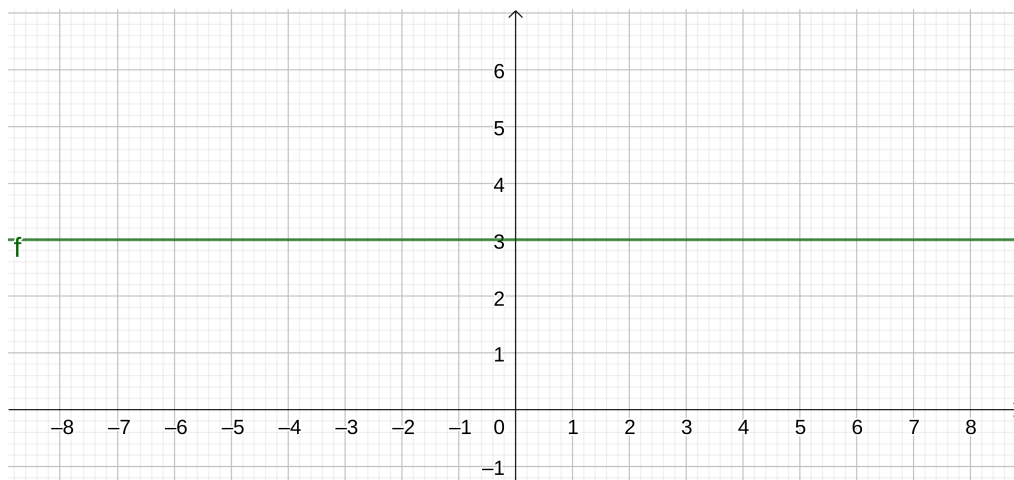
8. La dérivée de la fonction $\cos$ est la fonction $-\sin$.

9. La dérivée de la fonction $\tan$ est $\frac{1}{\cos^2}$, autrement dit $\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$.

Réponse aux exercices

1. Tangente au graphe de $f : x \rightarrow 3$ au point $(1; 3)$.

(a) $m = 0$

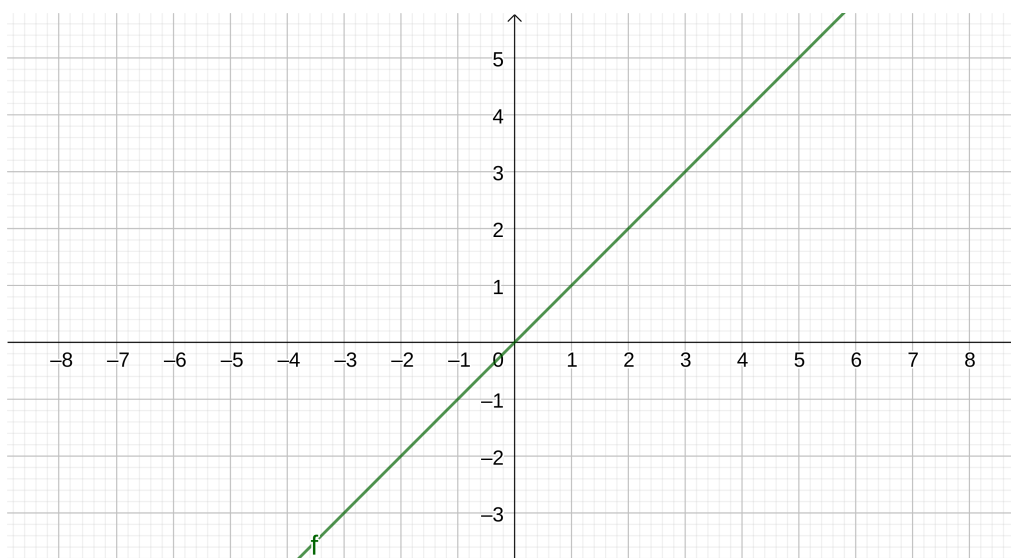


(b)

(c) $y = 3$

2. Tangente au graphe de $f : x \rightarrow x$ au point $(1; 1)$.

(a) $m = 1$



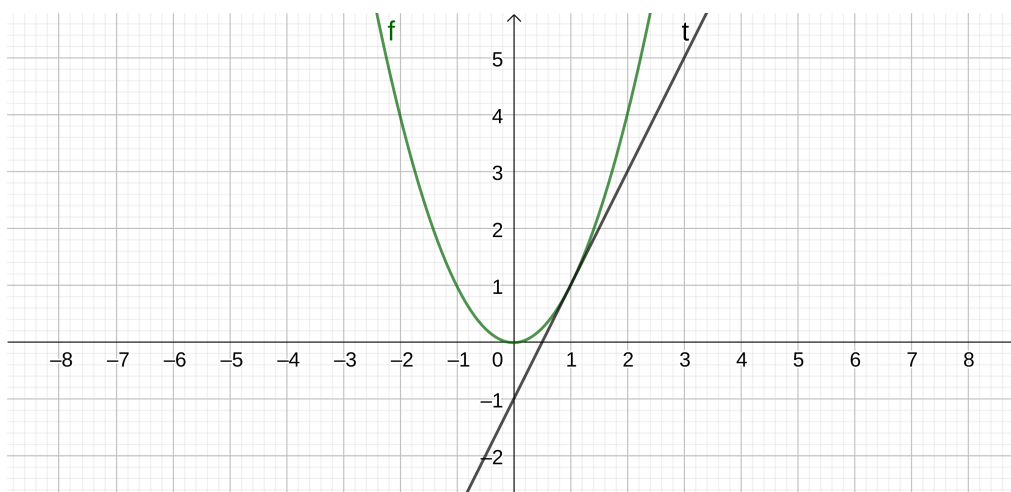
(b)

(c) $y = x$

3. Tangente au graphe de $f : x \rightarrow x^2$ au point $(1; 1)$.

(a) $f'(x) = 2x \quad f'(1) = 2$

$m = 2$



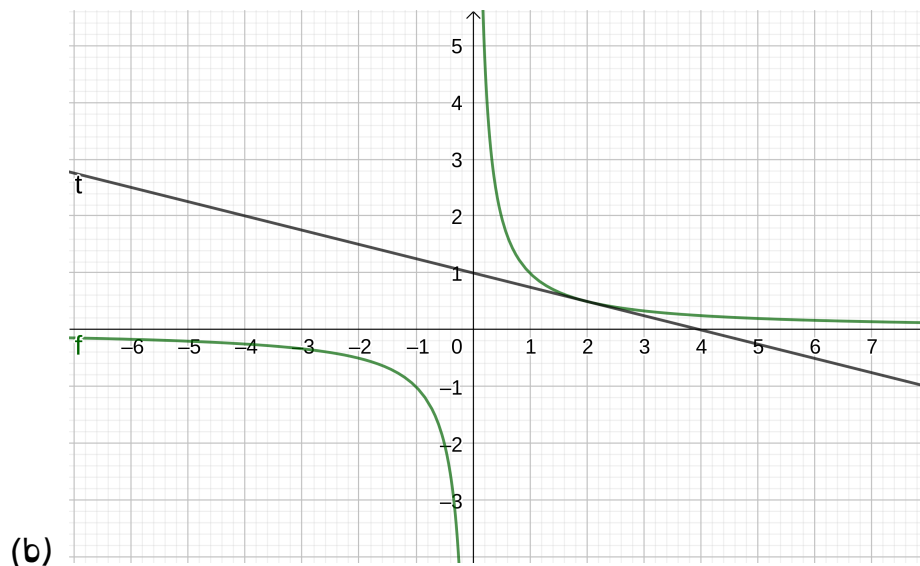
(a)

(b) $y = 2x - 1$

4. La tangente au graphe de $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$ au point $(2; \frac{1}{2})$.

(a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f'(2) = -\frac{1}{4}$

$m = -\frac{1}{4}$



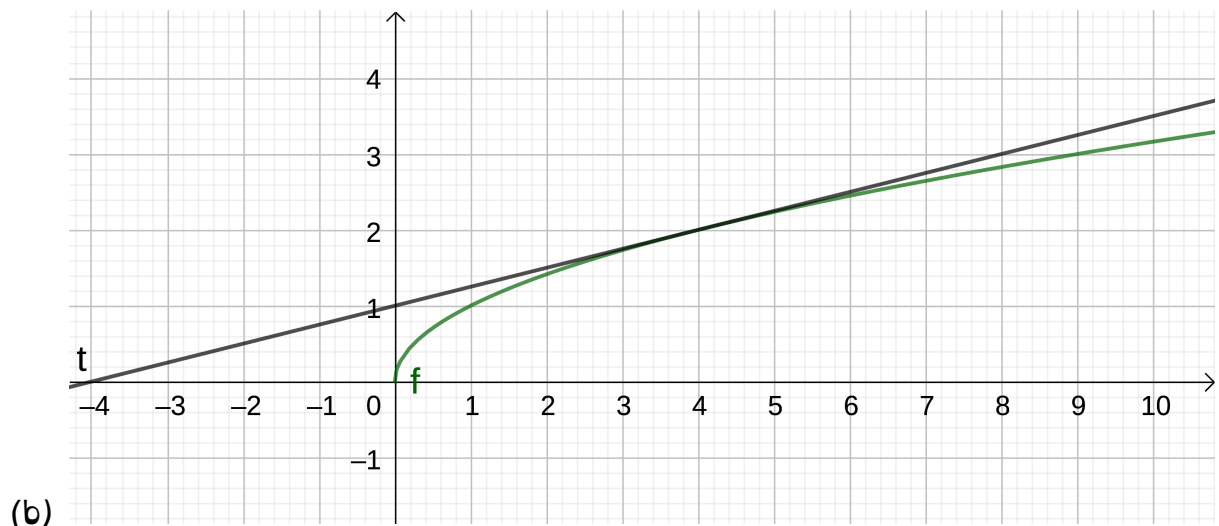
(c) $y = -\frac{1}{4}x + 1$

5. Exercice

La tangente au graphe de $f : x \rightarrow \sqrt{x}$ au point $(4; 2)$.

(a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad f'(4) = \frac{1}{4}$

$m = \frac{1}{4}$



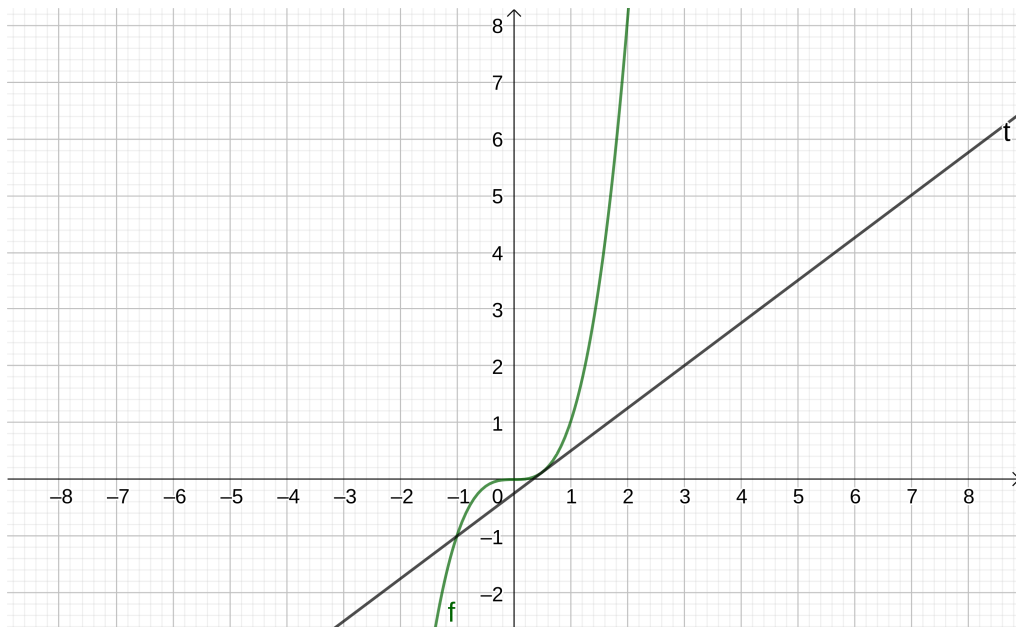
(c) $y = \frac{1}{4}x + 1$

Exercice

La tangente au graphe de $f : x \rightarrow x^3$ au point $(\frac{1}{2}; \frac{1}{8})$.

(a) $f'(x) = 3x^2 \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$

$m = \frac{3}{4}$



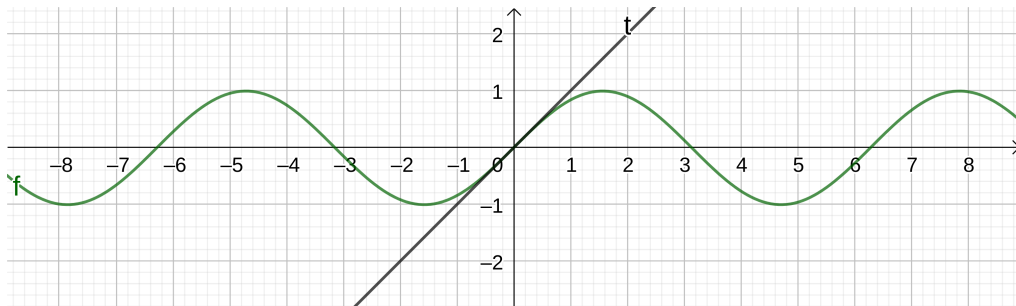
(b)

$$(c) y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$

6. La tangente au graphe de $\sin$ au point $(0; 0)$.

$$(a) f'(x) = \cos(x) \quad f'(0) = 1$$

$m = 1$ Voici pourquoi la fonction $\sin$ coupe l'axe Ox à 45° (dans un repère orthonormé).



(b)

$$(c) y = x$$

3.4 Dérivée et opérations

A retenir

Dans ce qui suit, f et g sont des fonctions dérivables sur un domaine commun et k est une constante.

$$1. \quad (f + g)' = f' + g'$$

2.
$$(k.f)' = k.f'$$

3.
$$(f.g)' = f'.g + f.g'$$

4.
$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

5.
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$$

6. Dérivation des fonctions composées

Réponse aux exercices

1. Calcule

a) $2 - 6x + 16x^3$	l) $\frac{-23}{(4x+5)^2}$
b) $-8x + 21x^2$	m) $\frac{15x^2 - 24x - 6}{(3x^2 - x + 2)^2}$
c) $-6x^5 - 8x^3$	n) $\frac{-23x^2 + 10x - 2}{(5x^2 - 2x)^2}$
d) $30x^2 - 42x + 14$	o) $\frac{23x^2 - 10x + 2}{(4x^2 + 3x - 1)^2}$
e) $3 - \frac{10}{x^3}$	p) $\frac{1 + 4x^2}{\sqrt{1 + 2x^2}}$
f) $10(x^2 + 4x - 1)(2x + 4)$	q) $\frac{1 - 5x^3}{2\sqrt{x}(1 + x^3)^2}$
g) $\frac{-6}{(2x+1)^4}$	r) $\frac{-4x+7}{(2x+1)^4}$
h) $\frac{8x-1}{2\sqrt{4x^2-x+1}}$	s) $(x^2 - 1)^2(7x^2 - 1)$
i) $3 \cos x$	t) $\frac{17x-6}{(x+2)^3}$
j) $-3 \sin(3x+2)$	u) $\frac{(3x-1)(3x+1)}{2x^2}$
k) $\sin x + x \cdot \cos x$	v) $\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$

2. Deuxième série

(a) $3 \frac{x^2 - 4x + 2}{(2-x)^2}$

(b) $-6x + \frac{1}{x^2} + 1$

(c) $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{2x-1}} \frac{1}{(1-x)^2}$

$$(d) \frac{-x+4}{\sqrt{x-1}(2x+4)^2} = \frac{-x+4}{4\sqrt{x-1}(x+2)^2}$$

$$(e) \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(f) 5 - \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$(g) \frac{4}{\cos^2(4x+1)}$$

$$(h) \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (2\tan x - 1)$$

$$(i) \sin x \cdot (3 - 2\cos x)$$

$$(j) \frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

$$(k) \frac{-4}{(2x+1)^3}$$

$$3. f'(x) = 2x - 1 \quad f'(2) = 3 \quad t \equiv y = 3x + p$$

Réponse : $t \equiv y = 3x - 5$

4. Impossible : $\frac{1}{3}$ n'a pas d'image !

$$5. f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-4}} \quad f'(3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad t \equiv y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + p$$

$f(3) = \sqrt{2}$ Le point de contact est donc $(3; \sqrt{2})$

$$\text{Réponse : } t \equiv y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \sqrt{2}$$

6. (Ex 21) On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par l'expression $f(x) = \sqrt[3]{x} - x^{-\frac{1}{6}}$

Que vaut la dérivée de cette fonction en $x = 1$?

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' - \left(x^{-\frac{1}{6}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}$$

$$\text{Réponse : } \frac{1}{2}$$

7. (Ex 22) On considère la dérivée f' de la fonction f définie par

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt{x^3}$$

Que vaut la dérivée de cette fonction en $x = 1$?

$$f'(x) = 3\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' - 4\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = 2x^{-\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{2}}$$

Réponse : -4.

3.5 Dérivée et variation

A retenir

si $f'(x) > 0$ dans un intervalle, alors f y est strictement croissante.

si $f'(x) < 0$ dans un intervalle, alors f y est strictement décroissante.

Réponse aux exercices

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x \cdot (x - 2)$ Racines : 0 et 2.

x		0		2	
$f'(x) = 3x^2 - 6x$	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

$$f(M) = 5 \quad f(m) = 1$$

2. $f'(x) = x^3 - 4x = x \cdot (x^2 - 4)$ Racines : 0 et ± 2 .

x		-2		0		2	
x	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 - 4$	+	0	-	-	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
f	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$	m_2	$\nearrow$

$$f(M) = 2 \quad f(m) = -2 \quad f(m_2) = -2$$

3. $f'(x) = \frac{-23}{(4x+5)^2}$

x		$-\frac{5}{4}$	
-23	-	-	-
$(4x+5)^2$	+	0	+
$f'(x)$	-		-
f	$\searrow$		$\searrow$

3.6 Variation d'autres fonctions

A retenir

La première chose à faire est de déterminer le domaine de la fonction.

Avant ou après avoir étudié la variation de la fonction, cherche les limites aux extrémités du domaine.

Réponse aux exercices

Étudie la variation de la fonction f (avec domaine et compléments pour les x très grands, très petits ou sans image) et représente-la à l'aide d'un logiciel :

1. $f(x) = x^3 + x^2 - 8x$

$$\text{dom} f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 8$$

x		-2		$\frac{4}{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

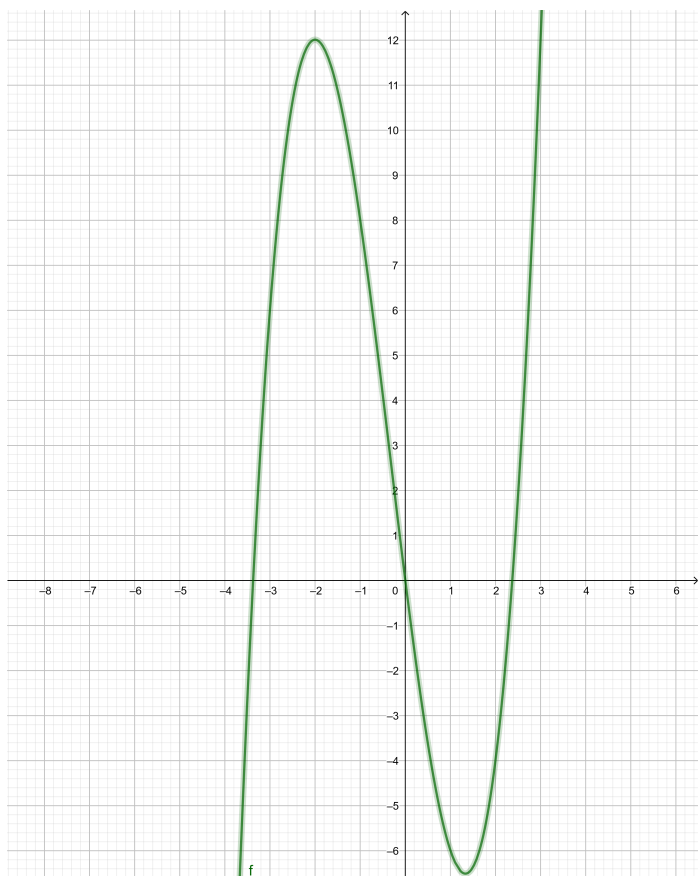
$$f(M) = 12 \quad f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{176}{27}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 + x^2 - 8x = \pm\infty$$

Pas d'AH

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 + x - 8 = +\infty$$

Pas d'AO



2. $f(x) = \frac{2x+1}{3-x}$

$$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

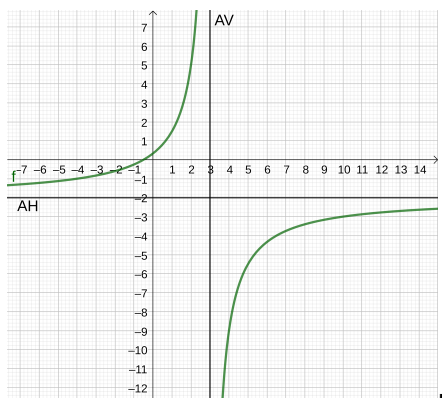
$$f'(x) = \frac{7}{(3-x)^2}$$

x		3	
7	+	+	+
$(3-x)^2$	+	0	+
$f'(x)$	+		+
f	$\nearrow$		$\nearrow$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{3-x} = -2 \quad AH \equiv y = -2 \quad \text{Pas d'AO}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+1}{3-x} = \frac{7}{0} = \infty \quad AV \equiv x = 3$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{2x+1}{3-x} = +\infty \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{2x+1}{3-x} = -\infty$$



3. $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + 1}$

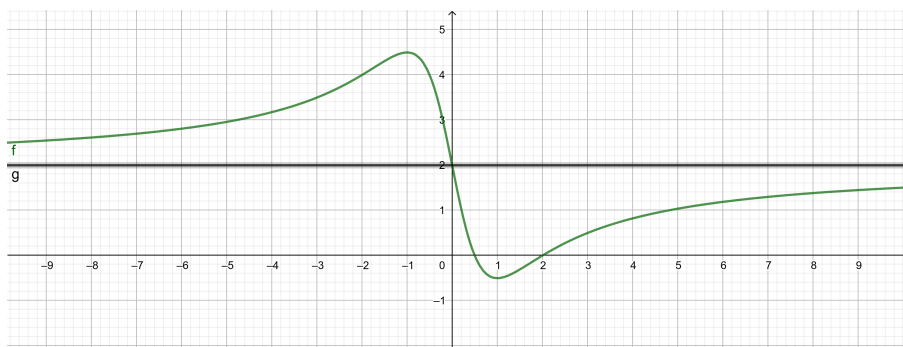
$\text{dom} f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{5x^2 - 5}{(x^2 + 1)^2}$

x		-1		1	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

$f(-1) = \frac{9}{2} \quad f(1) = -\frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + 1} = 2 \quad AH \equiv y = 2 \quad \text{Pas d'AO}$



4. $f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$

$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

$f'(x) = \frac{2x}{(4 - x^2)^2}$

x		-2		0		2	
$2x$	-	-	-	0	+	+	+
$(4 - x^2)^2$	+	0	+	+	+	0	+
$f'(x)$	-		-	0	+		+
f	$\searrow$		$\searrow$	m	$\nearrow$		$\nearrow$

$f(0) = \frac{1}{4}$

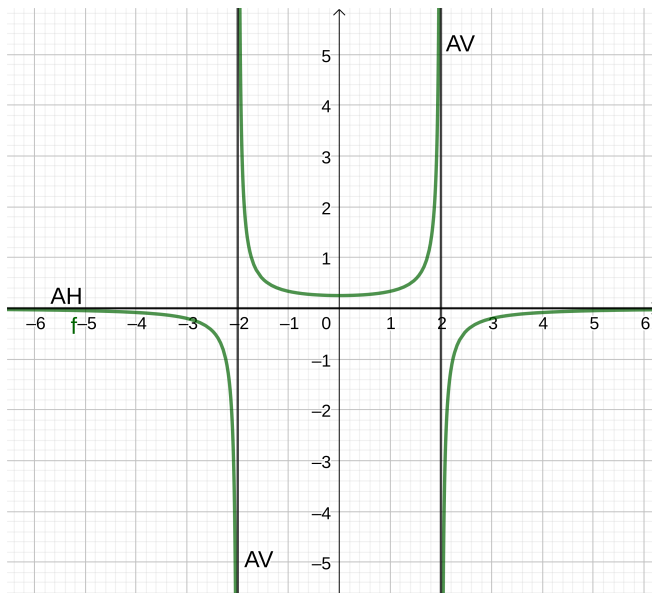
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{4 - x^2} = 0 \quad AH \equiv y = 0 \quad \text{Pas d'AO}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{4 - x^2} = \frac{1}{0} = \infty \quad AV \equiv x = -2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{1}{4 - x^2} = -\infty \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{1}{4 - x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{4 - x^2} = \frac{1}{0} = \infty \quad AV_2 \equiv x = 2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{4 - x^2} = +\infty \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{4 - x^2} = -\infty$$



5. (Ex 23) On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par l'expression

$$f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} - 15x + 12$$

Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ cette fonction est-elle strictement croissante ?

$$f'(x) = 2x^2 - 7x - 15 \quad \text{racines : } \frac{7 \pm 13}{4} = \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$$

x		$-\frac{3}{2}$		5	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

$$\text{Réponse : } \left] -\infty, -\frac{3}{2} \right[\cup] 5, +\infty [$$

6. (Ex 25) Dans un grand lac, l'évolution du nombre de truites $N(t)$ ($N(t) > 0$) au cours du temps t (en années) obéit à :

$$N'(t) = 0,3N(t) - 0,06t \cdot N(t)$$

Pendant combien d'années le nombre de truites augmentera-t-il dans ce lac ?

$N'(t) = N(t)(0,3 - 0,06t)$ $N(t)$ n'a pas de racine $0,3 - 0,06t$ a comme racine 5.

t		5	
$N(t)$	+	+	+
$-0,06t + 0,3$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
f	$\nearrow$	M	$\searrow$

Réponse : Le nombre de truites augmentera pendant 5 ans.

3.7 Dérivée seconde

A retenir

- $f''(x) = [f'(x)]'$

La dérivée seconde indique la concavité de la fonction.

x	
$f''(x)$	+
f	$\smile$

x	
$f''(x)$	-
f	$\frown$

- Un point où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe est appelé **point d'inflexion**.

Réponse aux exercices

1. Calcule la dérivée seconde de chacune des fonctions étudiées au point précédent. Fais le tableau de concavité.

(a) $f(x) = x^3 + x^2 - 8x$

$\text{dom} f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 8$

$f''(x) = 6x + 2$

x		$-\frac{1}{3}$	
$f''(x)$	-	0	+
f	$\frown$	PI	$\smile$

$$(b) f(x) = \frac{2x+1}{3-x}$$

$$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$f'(x) = \frac{7}{(3-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{14}{(3-x)^3}$$

x		3	
14	+	+	+
$(3-x)^3$	+	0	-
$f''(x)$	+		-
f	∪		∩

$$(c) f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + 1}$$

$$\text{dom} f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{5x^2 - 5}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(10x) \cdot (x^2 + 1)^2 - (5x^2 - 5) \cdot 2 \cdot (x^2 + 1) (2x)}{(x^2 + 1)^4} = 2 \frac{-5x^3 + 15x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$= 10 \frac{x \cdot (-x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^3}.$$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$10x$	-	-	-	0	+	+	+
$-x^2 + 3$	-	0	+	+	+	0	-
$(x^2 + 1)^3$	+	+	+	+	+	+	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+	0	-
f	∪	PI	∩	PI_2	∪	PI_3	∩

$$(d) f(x) = \frac{1}{4-x^2}$$

$$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2}$$

2. Étudie la variation et la concavité de la fonction du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.

$$\text{dom} f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f''(x) = 2a$$

3. (Ex 21) Au cours de l'étude d'une fonction f d'une variable réelle x , on note l'observation suivante pour la valeur particulière x_0 :

$$f(x_0) f'(x_0) f''(x_0) < 0$$

Quelle proposition est correcte ?

- (a) $f(x_0) < 0$ f est croissant en x_0 et sa concavité est tournée vers le bas en ce point
- (b) $f(x_0) > 0$ f est décroissant en x_0 et sa concavité est tournée vers le bas en ce point
- (c) $f(x_0) > 0$ f est décroissant en x_0 et sa concavité est tournée vers le haut en ce point
- (d) $f(x_0) < 0$ f est décroissant en x_0 et sa concavité est tournée vers le haut en ce point.

Il n'y a que 4 façons qu'un produit de 3 facteurs soit négatif.

x	x_0	x_0	x_0	x_0
$f(x_0)$	-	-	+	+
$f'(x_0)$	-	+	-	+
$f''(x_0)$	-	+	+	-
$f(x_0) f'(x_0) f''(x_0)$	-	-	-	-

La proposition (c) est correcte (avant-dernière colonne).

partie VI

Retenir et appliquer (m64)

Chapitre 1

Fonctions Réciproques

1.0 Prérequis

A retenir

Fonction

Définitions

Une **fonction** de A dans R est une relation qui, à chaque élément de A , associe un nombre réel.

Notation : $f : A \rightarrow R$. Dans cette notation, f est le nom de la fonction, A en est le **domaine**, et la flèche indique la dépendance fonctionnelle.

Le nombre associé à x par f est appelé **image** de x et est noté $f(x)$.

L'ensemble des **couples** $(x, f(x))$ est le **graphe** de f .

L'ensemble des images est noté $f(A)$.

La fonction f est **strictement croissante** sur l'ensemble A ssi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \forall x_1, x_2 \in A.$$

La fonction f est **strictement décroissante** sur l'ensemble A ssi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \forall x_1, x_2 \in A.$$

m est un **minimum** de la fonction f dans A ssi

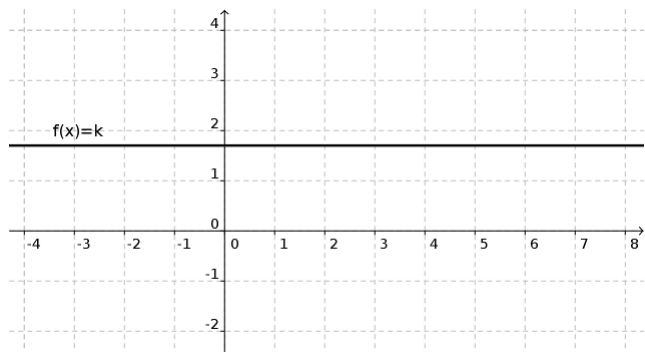
$$f(m) \leq f(x), \forall x \in A.$$

M est un **maximum** de la fonction f dans A ssi

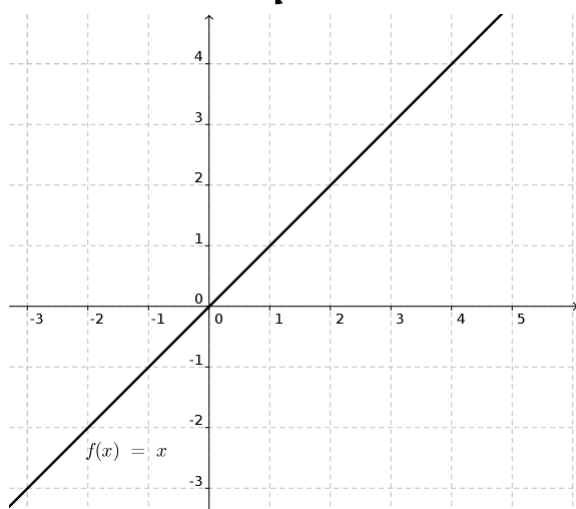
$$f(M) \geq f(x), \forall x \in A.$$

Fonctions de référence (rappel)

Fonctions constantes

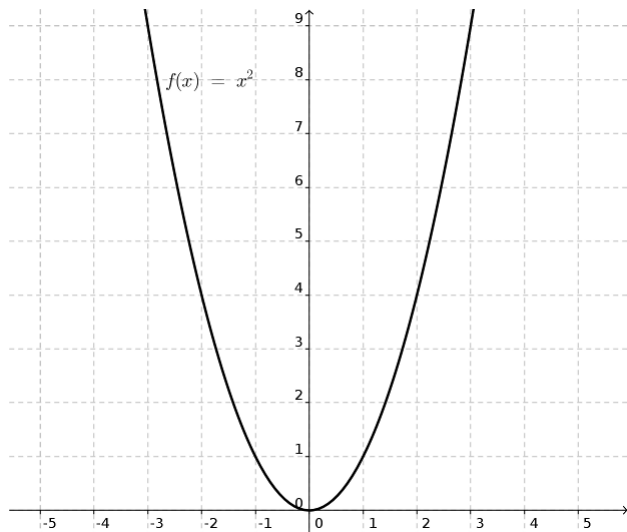
Domaine : $\mathbb{R}$ Racines : aucune (sauf si $k = 0$)

Fonction identique

Domaine : $\mathbb{R}$

Racines : 0

Fonction "carré"

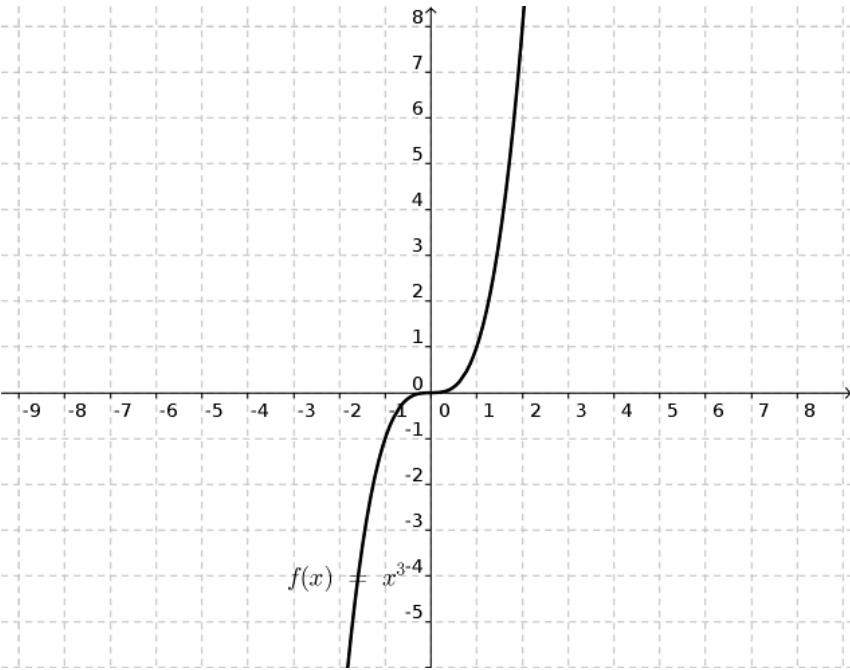
Domaine : $\mathbb{R}$

Racines : 0

Variation

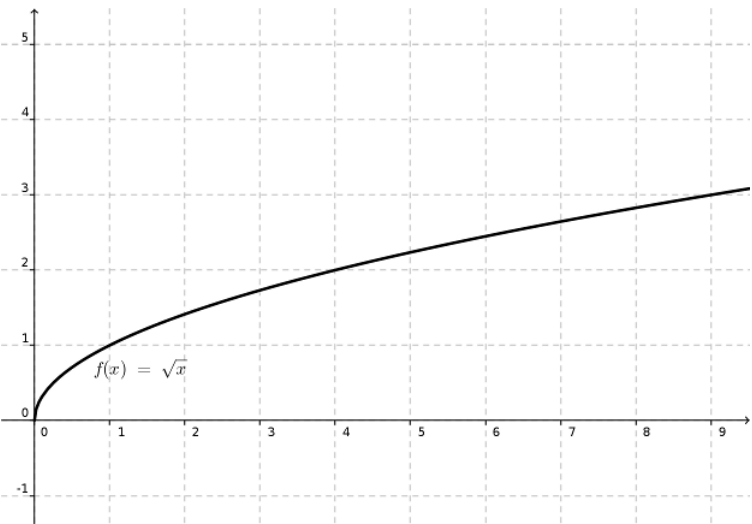
x		0	
x^2	$\searrow$	m	$\nearrow$

Fonction "cube"



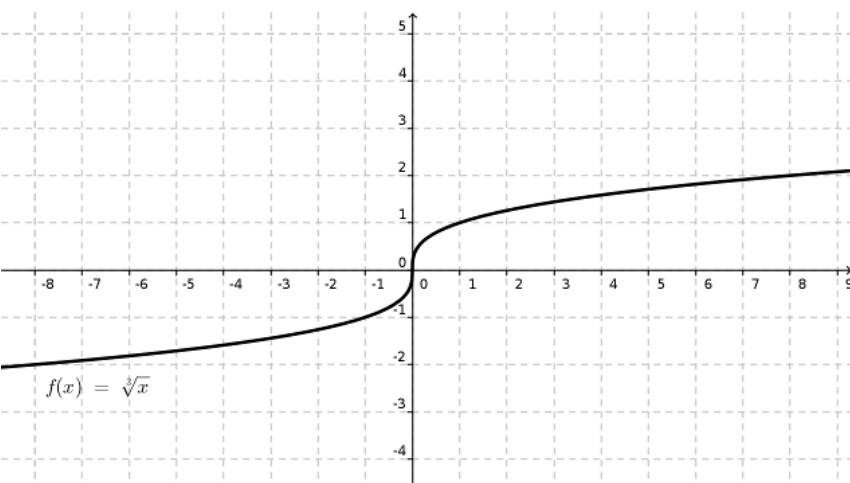
Domaine :	$\mathbb{R}$	Variation	x	
Racines :	0		x^3	$\nearrow$

Fonction "radical"



Domaine :	$\mathbb{R}^+$	Variation	x	0
Racines :	0		$\sqrt{x}$	$\nearrow$

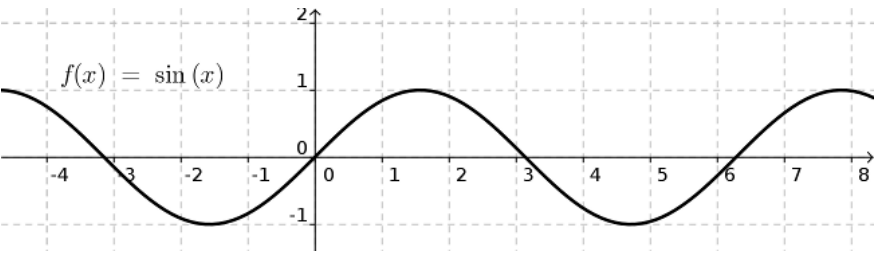
Fonction "racine cubique"



Domaine :	$\mathbb{R}$	Variation	x	
Racines :	0		$\sqrt[3]{x}$	$\nearrow$

Fonction sin

1

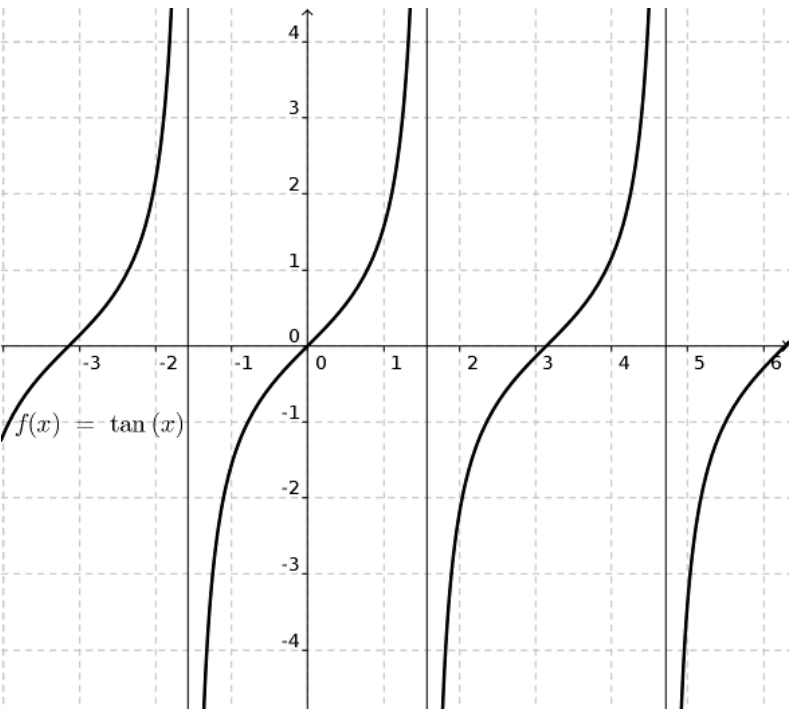


Domaine : $\mathbb{R}$
Racines : $k.\pi$ (k entier)

Variation (sur une période)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\nearrow M$	$\searrow m$	$\nearrow 0$

Fonction tan



Domaine : $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k.\pi : k \text{ entier} \right\}$
Racines : $k.\pi$ (k entier)

Variation (sur une période)

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$ \nearrow $	

Réponse aux exercices

1. Variation

x	-4		-2		0		2		4		x	-4,5		-2		0		2
$f(x)$	3,5	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$	m_2	$\nearrow$	4,5		$f(x)$	2	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	5,5

x		-1	
$f(x)$	$\nearrow$	$ $	$\nearrow$

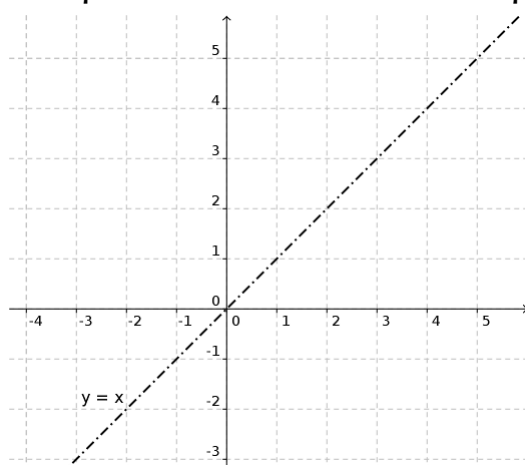
x	-6		-5		-3		-2		1		3		4		6
$f(x)$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	--	M	$\searrow$	m_2	///	2	$\searrow$	0

1.1 Relation réciproque

A retenir

Définitions

- La relation réciproque de la fonction f est l'ensemble des couples $(f(x), x)$.
- La première bissectrice du repère est celle qui traverse le premier quadrant.



Propriété

La symétrie par rapport à la première bissectrice applique l'axe X sur l'axe Y et l'axe Y sur l'axe X. Elle transforme donc chaque couple (x, y) en couple (y, x) et le graphe d'une fonction en graphe de sa relation réciproque.

Définition

Une fonction est injective lorsque, dans tout son domaine, deux x différents ont toujours deux images différentes.

Réponse aux exercices

2. Fonction ou pas ?

(a) Fonction! $y = x - 3$. On peut écrire $f(x) = x - 3$.

	x	y
	-2	1
	-1	2
	0	3
	1	4
Relation réciproque :	-3	0
	-4	-1
	-5	-2
	-6	-3
	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$

(b) Fonction! $y = x^2$. On peut écrire $f(x) = x^2$.

	x	y
	1	1
	4	2
	9	3
	16	4
Relation réciproque :	0	0
	1	-1
	4	-2
	9	-3
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

(c) Pas fonction! Il s'agit de "x est la valeur absolue de y".

	x	y
	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
Relation réciproque :	0	0
	-1	1
	-2	2
	-3	3
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(d) Fonction ! $y = \frac{1}{x}$. On peut écrire $f(x) = \frac{1}{x}$.

	x	y
	1	1
	$\frac{1}{2}$	2
	$\frac{1}{3}$	3
Relation réciproque :	$\frac{1}{4}$	4
	-1	-1
	$-\frac{1}{2}$	-2
	$-\frac{1}{3}$	-3
	2	$\frac{1}{2}$

(e) Pas fonction ! 1 a deux images.

	x	y
	1	1
	$\frac{1}{2}$	2
	$\frac{1}{3}$	3
	$\frac{1}{4}$	4
	-1	1

3. Justifiez que les fonctions suivantes sont injectives.

(a) f est une fonction du premier degré de pente 1 ($m = 1$). Elle est donc strictement croissante et donc injective.

(b) g est une fonction de référence (radical). Elle est strictement croissante et donc injective.

(c) h est la composée de deux fonctions strictement croissantes. Elle est donc strictement croissante et donc injective.

4. Justifiez que la fonction f n'est pas injective.

(a) $f(-1) = 1 = f(1)$

(b) $f(-2) = 4 = f(2)$

(c) $f(\pi) = 0 = f(0)$

1.2 Exercices

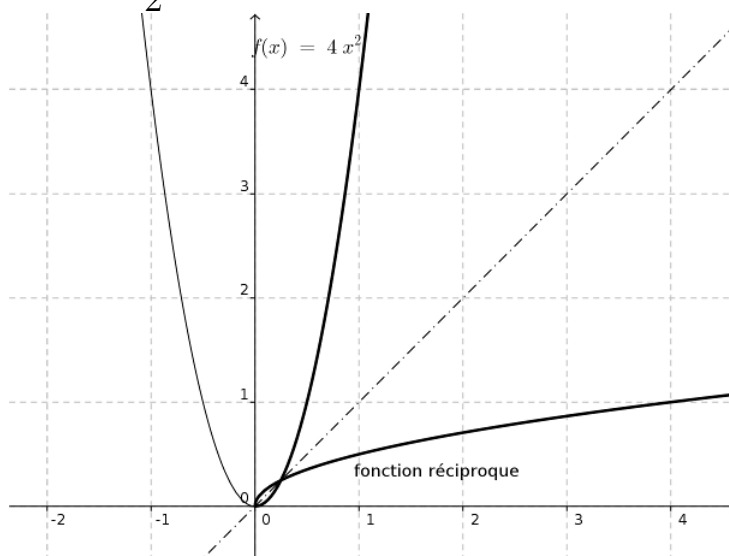
1. a) $f(-1) = 4 = f(1)$ La fonction n'est pas injective.

b) f est strictement croissante donc injective dans $\mathbb{R}^+$.

c) Pour f , $y = 4x^2$ avec $x \geq 0$.

Pour f^{-1} , $x = 4y^2 \iff y^2 = \pm \frac{\sqrt{x}}{2}$ avec $y \geq 0$. Donc $y = \frac{\sqrt{x}}{2}$

$$f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$$



d)

e) $\text{dom}(f^{-1}) = \mathbb{R}^+$.

x	0
f	$\searrow m \nearrow$

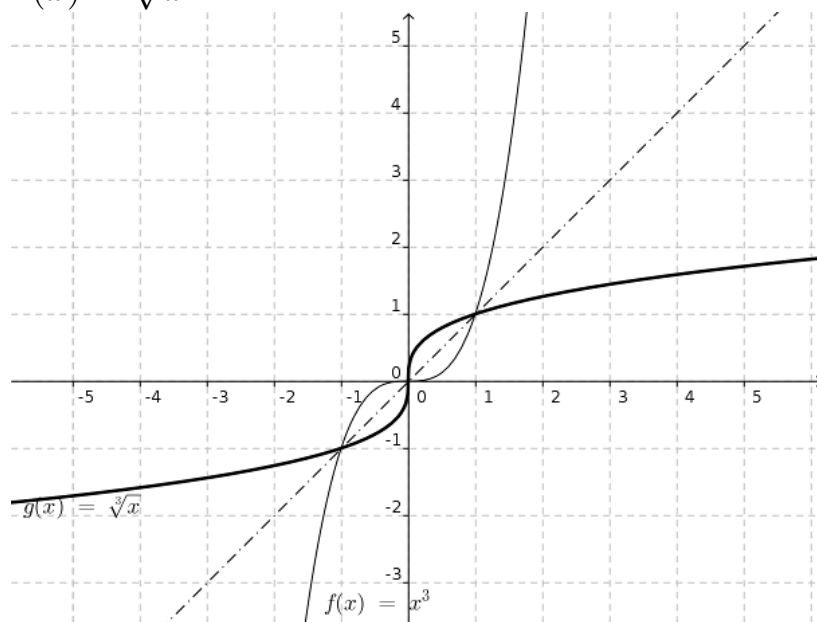
2. a) La fonction est injective dans son domaine $\mathbb{R}$ comme fonction de référence (cube).

b) Pas de restriction

c) Pour f , $y = x^3$

Pour f^{-1} , $x = y^3 \iff \sqrt[3]{x} = y$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$



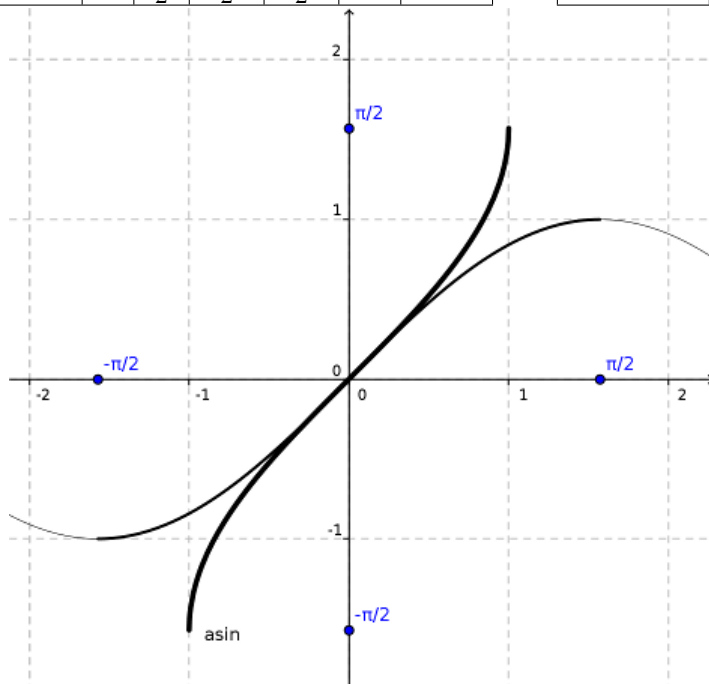
d)

e) $\text{dom}(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

3. a) $\sin$ n'est pas une fonction injective car elle est périodique. Cette fonction est str $\nearrow$ dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ mais il y a mieux : $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- b) le domaine a été restreint à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ où $\sin$ est str $\nearrow$ donc injectif.
- c) Nous ne pouvons pas donner de formule pour $\sin^{-1}(x)$. Voici des valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1
$\sin^{-1} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$



d)

La fonction $\sin^{-1}$ est strictement croissante comme fonction réciproque d'une fonction strictement croissante. Notez les tangentes verticales aux points $\left(-1; -\frac{\pi}{2}\right)$ et $\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$ qui se justifient par les tangentes horizontales à la fonction $\sin$.

e) $\text{dom}(\sin^{-1}) = [-1; 1]$

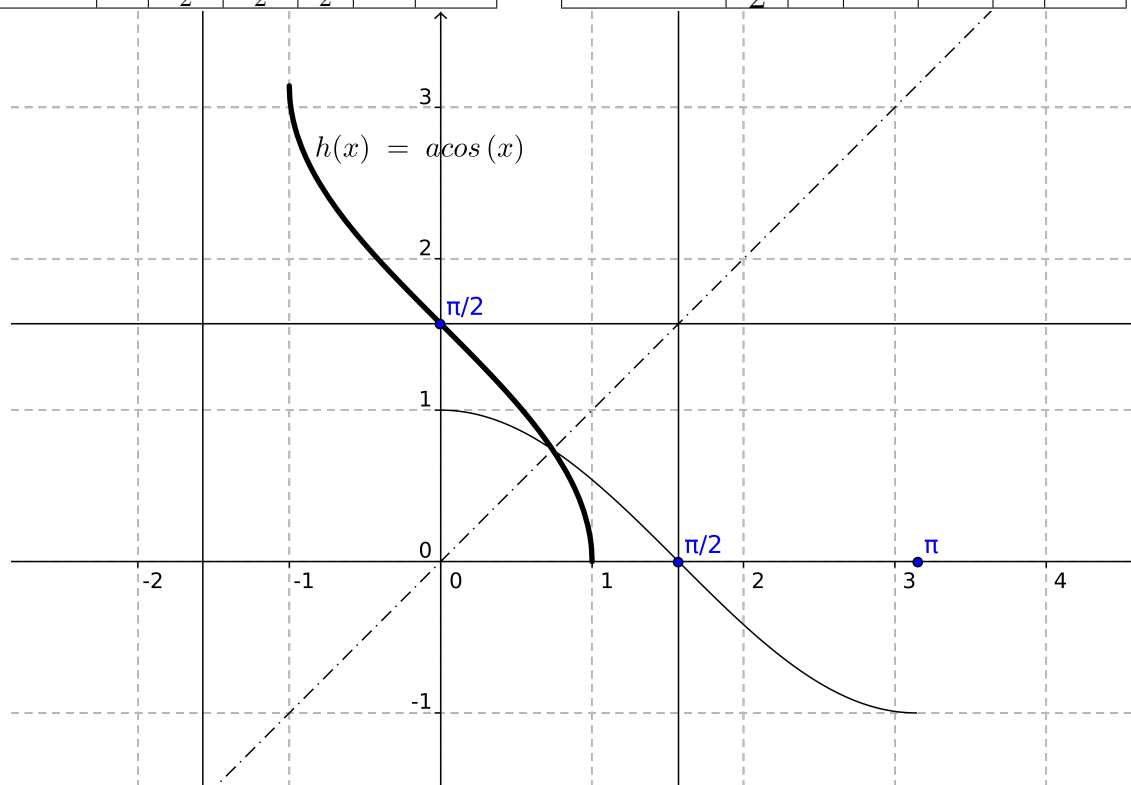
La fonction $\sin^{-1}$ est parfois notée arcsin ou *asin*.

C'est une fonction utilisée en théorie.

4. a) $\cos$ n'est pas une fonction injective car elle est périodique. Cette fonction est str $\searrow$ dans $[0; \pi]$
- b) le domaine a été restreint à $[0; \pi]$ où $\cos$ est str $\searrow$ donc injectif.
- c) Nous ne pouvons pas donner de formule pour $\cos^{-1}(x)$. Voici des valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1
$\cos^{-1} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	π



d)

La fonction $\cos^{-1}$ est strictement décroissante comme fonction réciproque d'une fonction strictement décroissante. Notez les tangentes verticales aux points $(-1; \pi)$ et $(1; 0)$ qui se justifient par les tangentes horizontales à la fonction $\cos$.

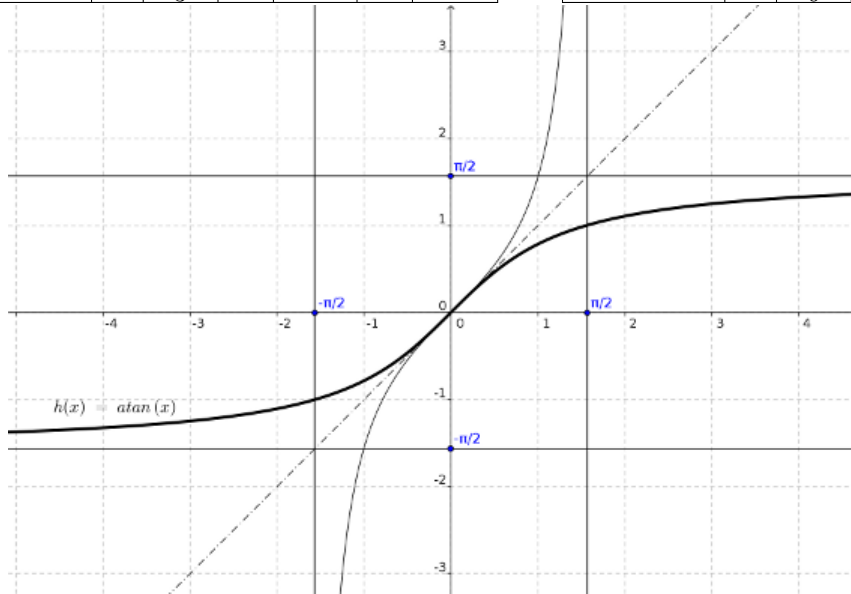
e) $\text{dom}(\cos^{-1}) = [-1; 1]$

La fonction $\cos^{-1}$ est parfois notée $\arccos$ ou $\arccos$. C'est une fonction utilisée en théorie.

5. a) $\tan$ n'est pas une fonction injective car elle est périodique. Cette fonction est str $\nearrow$ dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ mais il y a mieux : $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
 b) le domaine a été restreint à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ où $\tan$ est str $\nearrow$ donc injectif.
 c) Nous ne pouvons pas donner de formule pour $\tan^{-1}(x)$. Voici des valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\tan^{-1} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$



d)

La fonction $\tan^{-1}$ est strictement croissante comme fonction réciproque d'une fonction strict. croissante.

Notez les asymptotes horizontales de $\tan^{-1}$ d'équations $AH \equiv y = \pm \frac{\pi}{2}$, symétriques des asymptotes verticales de $\tan$.

e) $\text{dom}(\tan^{-1}) = \mathbb{R}$

La fonction $\tan^{-1}$ est parfois notée arctan ou *atan*.

C'est une fonction utilisée en théorie.

Chapitre 2

Exponentielles et Logarithmes

2.0 Prérequis

A retenir

Fonction du premier degré

$f : x \rightarrow mx + p$ ($m \neq 0$) est une fonction du premier degré.

x		$-\frac{p}{m}$	
$mx + p$	signe contraire de m	0	signe de m

Le graphe d'une fonction du premier degré est une droite de pente m .

Fonction du second degré

$f : x \rightarrow ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) est une fonction du second degré.

Le graphe d'une fonction du second degré est une parabole

qui admet l'Axe $\equiv x = -\frac{b}{2a}$

Si $b^2 - 4ac < 0$

x	
$ax^2 + bx + c$	signe de a

Si $b^2 - 4ac = 0$

x		$-\frac{b}{2a}$	
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

Si $b^2 - 4ac > 0$

x		x_1		x_2	
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe contraire de a	0	signe de a

où x_1 et x_2 sont les racines ($x_1 < x_2$) de $ax^2 + bx + c$.

$b^2 - 4ac$ sera noté ρ .

En résumé : Signe de a partout, sauf entre les racines.

Dérivée

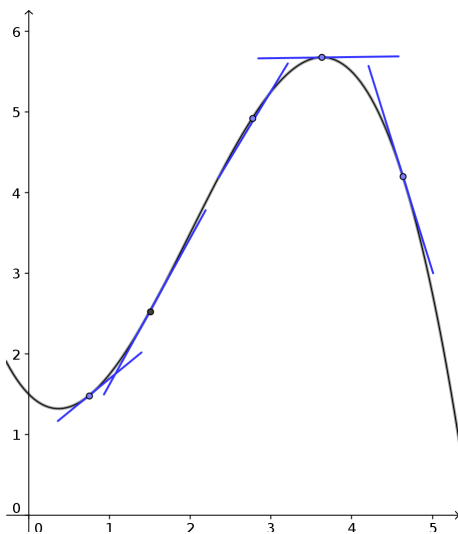
La dérivée de la fonction f est une fonction f' qui indique comment la fonction f varie.

Cela signifie que le signe de f' indique si la fonction f est croissante ou décroissante.

Tangente en un point d'une fonction

Intuitivement, la tangente existe en un point de f si celui-ci ne forme pas un "coin" (comme valeur absolue en 0).

Dans tout ce qui suit, cette tangente existe, sauf mention explicite du contraire.



Ainsi, nous pouvons donner en chaque point d'une fonction *régulière*, la

définition de la dérivée

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

En pratique

$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ est la pente de la tangente au point d'abscisse x .

Limite en un réel

Dans tout ce qui suit, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

signifie que $f(x)$ est aussi proche qu'on veut de b à condition que x soit suffisamment proche de a .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

signifie que $f(x)$ est aussi grand qu'on veut à condition que x soit suffisamment proche de a .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

signifie que $f(x)$ est aussi petit qu'on veut à condition que x soit suffisamment proche de a .

Techniques de calcul de limites - limites en un réel

$$\text{Si } f \text{ est continue en } a \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Fonctions continues : polynômes, $\sin$, $\cos$, $\sqrt{x}$ et $|x|$. Une somme, un produit ou une composée de fonctions continues est une fonction continue.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + x - 5 = 7$$

Quotient de fonctions continues

Soit $\frac{n(x)}{d(x)}$ un tel quotient.

1. Si $d(x) \neq 0$

le quotient est continu.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{x - 5} = -5$

2. Si seul $d(x) = 0$

la limite est infinie.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 1}{x - 5} = \infty$ et même $\lim_{x \rightarrow 5^\pm} \frac{x^2 + 1}{x - 5} = \pm\infty$

3. Si $n(x) = 0$ et $d(x) = 0$
 tout peut arriver.
 C'est l'indétermination " $\frac{0}{0}$ ".

Exemples

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{2 - x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2} -(x+2) = -4$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{2-x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x-2)}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2} -(x-2) = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2) \cdot (x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)} = \infty \quad \text{et même} \quad \lim_{x \rightarrow 2 \pm} \frac{-1}{(x-2)} = \mp \infty$$

Limite à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

signifie que $f(x)$ est aussi proche qu'on veut de b à condition que x soit suffisamment grand.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

signifie que $f(x)$ est aussi grand qu'on veut à condition que x soit suffisamment grand.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

signifie que $f(x)$ est aussi petit qu'on veut à condition que x soit suffisamment grand.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

signifie que $f(x)$ est aussi proche qu'on veut de b à condition que x soit suffisamment petit.

et ainsi de suite.

Techniques de calcul de limites - limites à l'infini

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 = -\infty$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 = +\infty$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0}$$

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{x^2} = 0$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^5} = 0$$

Asymptotes verticales

Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite $AV \equiv x = a$ est asymptote verticale au graphe de f .

Asymptotes horizontales

Lorsque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$, on dit que la droite $AH \equiv y = b$ est asymptote horizontale au graphe de f .

Suites géométriques

Définition

Une suite géométrique est une suite numérique dont chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un nombre constant $q \neq 0$.

$$t_k = t_{k-1} \cdot q$$

Ce nombre constant est appelé *raison*.

Exposants rationnels¹

$$a^{\frac{p}{r}} = \sqrt[r]{a^p} \quad \text{où } p \text{ et } r \text{ sont des nombres entiers } (r \neq 0)$$

Remarques

- Si r est pair, il faut imposer $a \geq 0$.

Exemple : $a^{\frac{p}{2}} = \sqrt[2]{a^p} = \sqrt{a^p}$

- Si p est négatif, il faut imposer $a \neq 0$.

Exemple : $a^{\frac{-1}{r}} = \sqrt[r]{a^{-1}} = \sqrt[r]{\frac{1}{a}}$

Réponse aux exercices

Signe

1. Étudie le signe de

(a) $\frac{x}{3x-7} \quad \left| \begin{array}{c|c|c} & & \frac{7}{3} \\ \hline & - & 0 \\ \hline & & + \end{array} \right.$

(b) $\frac{x}{x^2-5x+6} \quad \left| \begin{array}{c|c|c|c} & & 2 & 3 \\ \hline & + & 0 & - \\ \hline & & 0 & + \end{array} \right.$

(c) $\frac{x}{4-3x} \quad \left| \begin{array}{c|c} & \frac{4}{3} \\ \hline & 0 \\ \hline & - \end{array} \right.$

(d) $\frac{x}{-x^2-5x+6} \quad \left| \begin{array}{c|c|c|c} & & -6 & 1 \\ \hline & - & 0 & + \\ \hline & & 0 & - \end{array} \right.$

(e) $\frac{x}{x^2-x+6} \quad \left| \begin{array}{c} \\ \hline + \end{array} \right.$

¹Un nombre rationnel est le quotient de deux entiers.

(f)

x		2
$-x^2 + 4x - 4$	-	0

(g)

x		2		$\frac{7}{3}$		3
$x^2 - 5x + 6$	+	0	-	-	-	0
$3x - 7$	-	-	-	0	+	+
$\frac{x^2 - 5x + 6}{3x - 7}$	-	0	+	+	-	0

(h)

x		-3		-2
$x^2 + 5x + 6$	+	0	-	0
$x^2 + 1$	+	+	+	+
$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 1}$	+	0	-	0

(i)

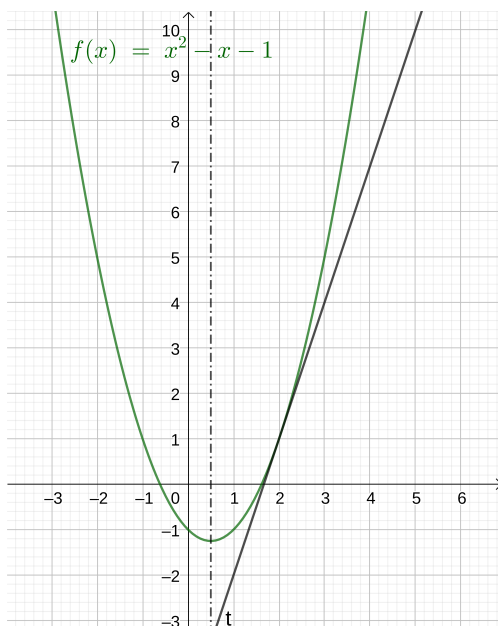
x		1
$x - 1$	-	0
$2x^2 + x + 1$	+	+
$2x^3 - x^2 - 1$	-	0

Dérivée et tangente en un point d'une fonction

2.

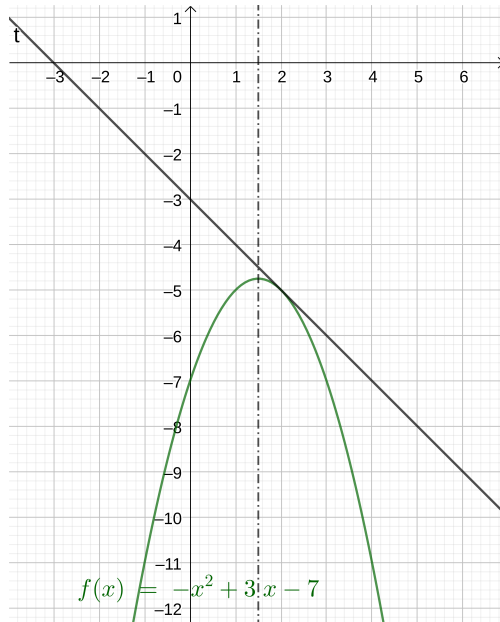
x		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	-	0
$f(x)$	$\searrow$	m

Note la présence d'un minimum en $x = \frac{1}{2}$.



	x		$\frac{3}{2}$	
3.	$f'(x)$	+	0	-
	$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$

Maximum en $x = \frac{3}{2}$.



$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4}$ signifie que $\frac{x-2}{x^2-4}$ est aussi proche qu'on veut de $\frac{1}{4}$ à condition que x soit assez proche de 2.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ signifie que $\frac{1}{(x-2)^2}$ est aussi grand qu'on veut à condition que x soit assez proche de 2.

Limite en un réel

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4}$ signifie que $\frac{x-2}{x^2-4}$ est aussi proche qu'on veut de $\frac{1}{4}$ à condition que x soit assez proche de 2.

5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ signifie que $\frac{1}{(x-2)^2}$ est aussi grand qu'on veut à condition que x soit assez proche de 2.

Limite à l'infini

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 5} = \frac{1}{2}$ signifie que $\frac{x^2 + 1}{2x^2 - 5}$ est aussi proche qu'on veut de $\frac{1}{2}$

à condition que x soit assez grand.

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0$ signifie que $\frac{1}{(x-2)^2}$ est aussi proche qu'on veut de 0

à condition que x soit assez petit.

8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^3}{(x-2)^2} = +\infty$ signifie que $\frac{1-x^3}{(x-2)^2}$ est aussi grand qu'on veut de 0

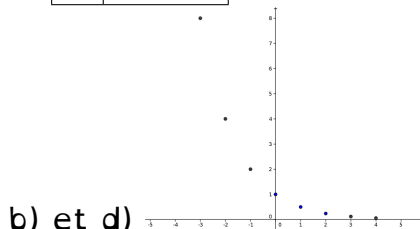
à condition que x soit assez petit.

Incursion

9. a)

n	$s(n)$
0	1
1	0,5
2	0,25
3	0,125
4	0,0625

Chaque $s(n)$ s'obtient en multipliant le précédent par 0,5.



b) et d)

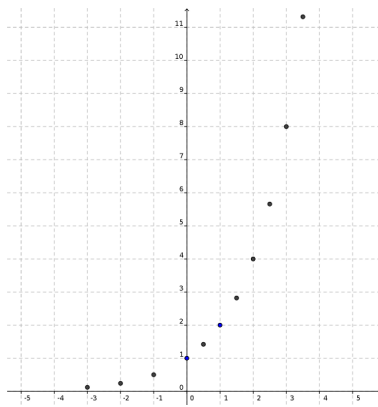
c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = 0$

e) Que vaut $\lim_{n \rightarrow -\infty} s(n) = +\infty$

f) Non. Que vaudrait $0,5^\pi$?

10. a) et b)

n	$s(n)$
0	1
1	2
2	4
3	8
0,5	$\sqrt{2}$
1,5	$2\sqrt{2}$
2,5	$4\sqrt{2}$
3,5	$8\sqrt{2}$



$$s(n) = 2^n$$

- b) Si le nombre de bactéries est multiplié par 2 après 1 heure, il est multiplié par $\sqrt{2}$ après $\frac{1}{2}$ heure car $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.
- c) Une heure avant l'instant initial, il y avait 0,5 million de bactéries, deux heures avant l'instant initial, 0,25 million de bactéries, trois heures avant 0,125 millions de bactéries.
- d) $\sqrt[4]{2}$ car $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2} = 2$.
- e) Oui car il y a des bactéries à tout instant.
Non car il n'y a pas de fraction de bactérie.

Exposants rationnels

11. Calcule

(a) $4^{\frac{5}{2}}$

(b) $9^{\frac{3}{2}}$

(c) $27^{\frac{4}{3}}$

(d) $8^{\frac{7}{3}}$

(e) $25^{\frac{3}{2}}$

(f) $0,027^{\frac{4}{3}}$

(g) $16^{\frac{3}{4}}$

(h) $32^{\frac{6}{5}}$

12. (Ex 21) L'expression $\sqrt{x^5}$ ($x > 0$)

- (i) Exprimez-la sous forme de puissance à exposant rationnel : $x^{\frac{5}{2}}$
- (j) Quelle expression lui est égale ?

$$\frac{x^3}{\sqrt{x}} = x^{3-\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}} \quad x^3 \sqrt{x} = x^{\frac{7}{2}} \quad x^3 - \sqrt{x} \quad \sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$$

13. (Ex 25) Un jeune enfant s'amuse avec une calculatrice à faire des additions de nombres de plus en plus grands. Il commence par $1+1$, puis additionne le résultat à lui-même, et recommence à chaque étape.

Il effectue ainsi successivement : $1+1$, $2+2$, $4+4$, et ainsi de suite.

Si n est un nombre entier non nul désignant le nombre d'étapes, quel est le résultat obtenu par l'enfant après n étapes ?

n	$f(n)$
1	2
2	4
3	8
4	16

Réponse : 2^n

2.1 Exponentielles de base quelconque

A retenir

Théorème de fondation

Il est aussi possible de calculer une puissance à exposant réel de n'importe quel nombre **strictement positif**.²

$$a^x$$

En calculant ces puissances, nous obtenons une fonction, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui à x associe a^x .

Cette fonction

respecte les formules

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

et est dérivable dans $\mathbb{R}$.

Ce théorème est admis.

A partir de maintenant, $a > 0$ et $a \neq 1$.

²Ce n'est pas possible pour un nombre négatif.

Définition

Cette fonction est appelée *exponentielle de base a* et notée $\exp_a$.

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow a^x$$

$$\exp_a(x) = a^x$$

Propriétés

1) $a^x > 0$

2) $a^0 = 1$ et que $a^1 = a$ ce qui donne les points $(0; 1)$ et $(1; a)$ dans les graphes.

Dérivée

La dérivée d'une fonction exponentielle est un multiple de celle-ci :

$$\exp'_a(x) = k \cdot \exp_a(x) \text{ ou encore } \boxed{(a^x)' = k \cdot a^x}$$

Variation

1. Quel est le signe de $(a^x)'$?

$$(a^x)' = k \cdot a^x \text{ où } a^x > 0.$$

$(a^x)'$ est donc strictement positif partout (si $k > 0$) ou

$(a^x)'$ est strictement négatif partout (si $k < 0$)

x	
$(a^x)'$	+
a^x	$\nearrow$

ou

x	
$(a^x)'$	-
a^x	$\searrow$

Comment distinguer ces deux cas ?

Reprenons les points remarquables $(0, 1)$ et $(1, a)$.

(a) Si $a > 1$ y augmente lorsque x passe de 0 à 1.

C'est le cas

x		0		1	
$(a^x)'$	+	+	+	+	+
a^x	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

(b) Si $a < 1$ y diminue lorsque x passe de 0 à 1.

C'est le cas

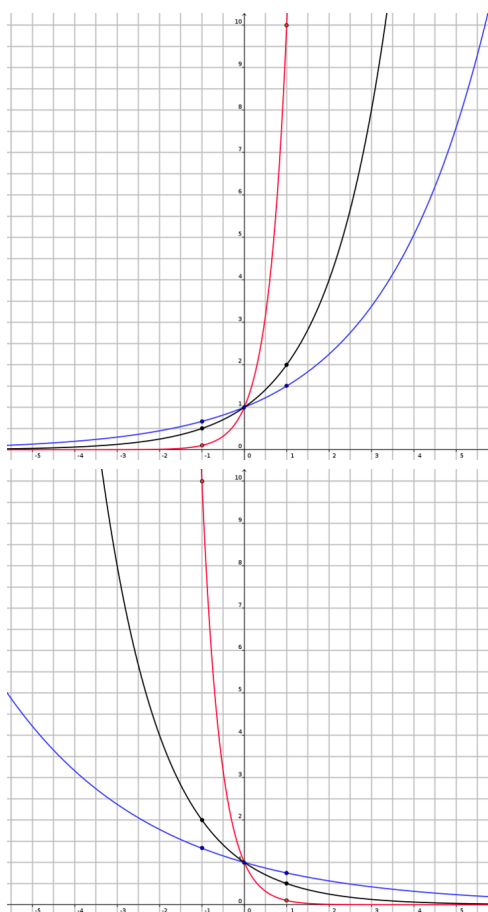
x		0		1	
$(a^x)'$	—	—	—	—	—
a^x	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

Réponse aux exercices

1. a) $\frac{1}{4^2}$ b) $\sqrt[4]{5^3} = \sqrt[4]{125}$ c) $\sqrt[4]{3^7}$ d) 27

e) $\frac{4^{\frac{5}{4}}}{4^{\frac{3}{2}}} = 4^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

2. a) 3,322 b) 0,342 c) 0,00636 d) 0,152



3. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^x = 0$ 4^x est aussi proche qu'on veut de 0 à condition que x soit assez petit. $AH \equiv y = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 0$ $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ est aussi proche qu'on veut de 0 à condition que x soit assez grand. $AH \equiv y = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} = 0$ 2^{-x} est aussi proche qu'on veut de 0 à condition que x soit assez grand. $AH \equiv y = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (0,27)^{x-2} = +\infty$ $(0,27)^{x-2}$ est aussi grand qu'on veut à condition que x soit assez petit. Pas d'AH en $-\infty$.

4. Calcule et interprète

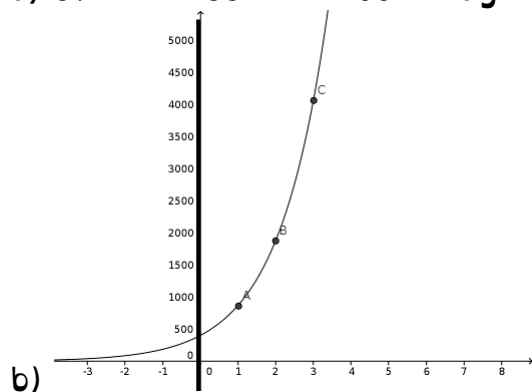
(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^2} = +\infty$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{0,5^x}{x} = -\infty$

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{0,5^x}{x^2} = +\infty$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{0,5^x}{x} = 0$

5. a) 871 1881 4064. Augmentation rapide du nombre de malades.



c) Il s'agit d'une fonction (très) croissante.

d) En 2015, $t = 31$ et $f(t) = 9383,7$ milliards de malades.

6. (Ex 22) 140000000 à 200000000 de cellules car le nombre de cellules est multiplié par moins de 1,5 contrairement aux autres possibilités.

2.2 Exponentielle népérienne

A retenir

Rappel

$$(a^x)' = k \cdot a^x$$

Définition

La fonction exponentielle pour laquelle $k = 1$, c'est-à-dire qui est égale à sa dérivée, est appelée exponentielle népérienne. Sa base est notée e :

$$(e^x)' = e^x$$

Propriétés

1. Cette fonction existe. (admis)
2. L'exponentielle népérienne est strictement croissante (sa dérivée est positive) et donc $e > 1$ (voir les théorèmes de variation).
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ (voir les théorèmes sur les limites).
4. $e \cong 2,718$ (admis)
5. Graphique : voir première partie.

Réponse aux exercices**1. Dérive**

$$(a) f'(x) = 1 + e^x$$

$$(b) f'(x) = e^x + x.e^x = (1 + x)e^x$$

$$(c) f'(x) = 2e^{2x}$$

$$(d) f'(x) = (4x - 1)e^{2x^2 - x - 1}$$

$$(e) f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$(f) f'(x) = \cos x.e^{2x} + 2 \sin x.e^{2x}$$

$$(g) f'(x) = -4x.e^{-x^2}$$

$$(h) f'(x) = 4x.e^{x^2}$$

$$(i) f'(x) = 2.\cos 2x.e^{\sin 2x}$$

2.3 Logarithmes de base quelconque

A retenir

La fonction exponentielle de base a est définie³ par $\exp_a : x \rightarrow a^x$.

La relation réciproque de cette fonction, autrement dit, la relation qui à a^x associe x , est-elle une fonction ?

Oui, car cette fonction exponentielle est strictement croissante lorsque $a > 1$ ou strictement décroissante lorsque $a < 1$. Ainsi, deux x différents ont toujours deux images différentes, ce qui entraîne qu'un y est l'image d'un seul x .

La relation qui à a^x associe x est donc bien une fonction.

Son domaine est $\mathbb{R}_0^+$ car nous avons vu que l'ensemble des images de $\exp_a$ est $\mathbb{R}_0^+$.

Revois les graphiques de la première partie.

Définition

La fonction réciproque de $\exp_a$ est appelée *logarithme de base a* et notée $\log_a$.

Propriétés

1. $y = a^x \iff x = \log_a y$ et $y = \log_a x \iff x = a^y$.

Dans ces relations, il faut tenir compte des domaines : $\mathbb{R}$ pour la fonction $\exp_a$ et $\mathbb{R}_0^+$ pour la fonction $\log_a$ (seuls les nombres strictement positifs ont un logarithme).

2. $\log_a 1 = 0$ et $\log_a a = 1$ car $a^0 = 1$ et $a^1 = a$ ce qui nous donne les points $(0; 1)$ et $(1; a)$

3. $\log_a x$ est l'exposant de la puissance de a égale à x .

4. Si $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$.

5. Si $a < 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$.

³Pour mémoire, $a > 0$ et $a \neq 1$

Formule fondamentale

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a (x_1) + \log_a (x_2)$$

Autres formules

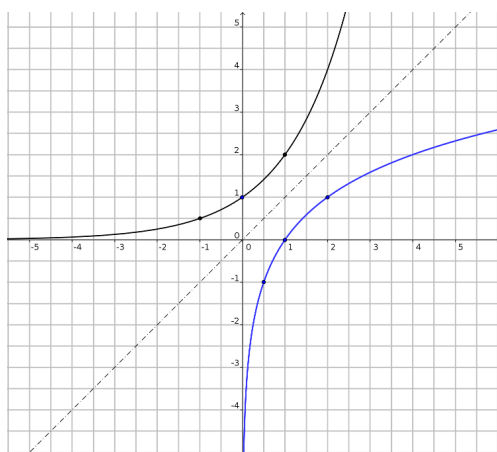
$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

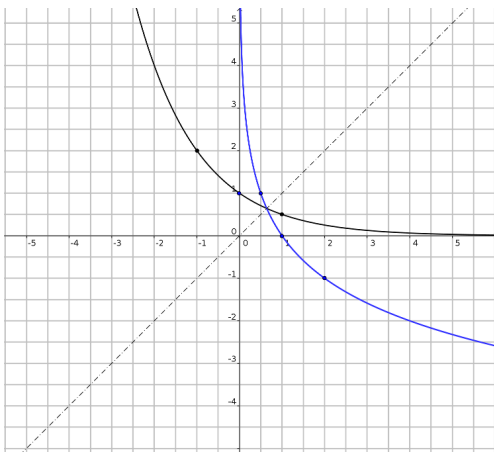
$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

Dérivée

$$(\log_a x)' = \frac{1}{k \cdot x}$$

Réponse aux exercices



1. a) $y = \log x \iff x = \exp_{10} x \quad x \in \mathbb{R}_0^+ \text{ et } y \in \mathbb{R}$
 b) $5 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1000}$
 c) 4
 d) e) $\log_5 \frac{1}{625} = x \iff 5^x = \frac{1}{625}$. Réponse : -4
 f) $\log_{27} 81 = x \iff 27^x = 81 \iff 3^{3x} = 3^4$. Réponse : $\frac{4}{3}$

2. a) $\frac{1}{3} \log x + \frac{1}{3} \log y$
 b) $3 \log x + \frac{1}{2} \log y$
 c) $-\log x + 2 \log y - \log 2$

3. Sachant que $\log 2 = 0,30103$ calcule :

- (a) 1,20412
 (b) $\log 2 - \log 1000 = -2,69897$
 (c) 1,50515

4. Exprime sous forme d'un seul logarithme :

- (a) $\log \frac{ac}{\sqrt{b}}$
 (b) $\log \frac{25}{5.3.15} = \log \frac{1}{9}$
 (c) $\log \frac{2^3.81}{3^2} = \log 72$

2.4 Logarithme népérien

Définition

Comme toute fonction exponentielle, l'exponentielle népérienne $\exp : x \rightarrow e^x$ admet comme réciproque une fonction, appelée *logarithme népérien*.

Cette fonction est notée $\ln$.

Propriétés

1. Son domaine est $\mathbb{R}_0^+$
2. $y = \ln(x) \iff x = e^y \quad (x \in \mathbb{R}_0^+)$
3. $y = e^x \iff x = \ln(y) \quad (x \in \mathbb{R})$
4. $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$ ce qui donne les points $(1, 0)$ et $(e, 1)$ du graphe.
5. $\ln(x)$ est l'exposant de la puissance de e égale à x .
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ base supérieure à 1 ($e = 2,718\dots$)
7. $\ln(x_1.x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$
8. $\ln(x^p) = p.\ln(x)$

Dérivée

Vu que $(\log_a x)' = \frac{1}{k.x}$ et que $k = 1$,

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Calcul de k

Nous savons que $(a^x)' = k.a^x$ et que $(\log_a x)' = \frac{1}{k.x}$.

Nous pouvons maintenant calculer k .

$a = e^{\ln a} \Rightarrow a^x = (e^{\ln a})^x \Rightarrow a^x = e^{x \ln a}$. Note cette relation : $a^x = e^{x \ln a}$

Dérivons-la : $(a^x)' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$

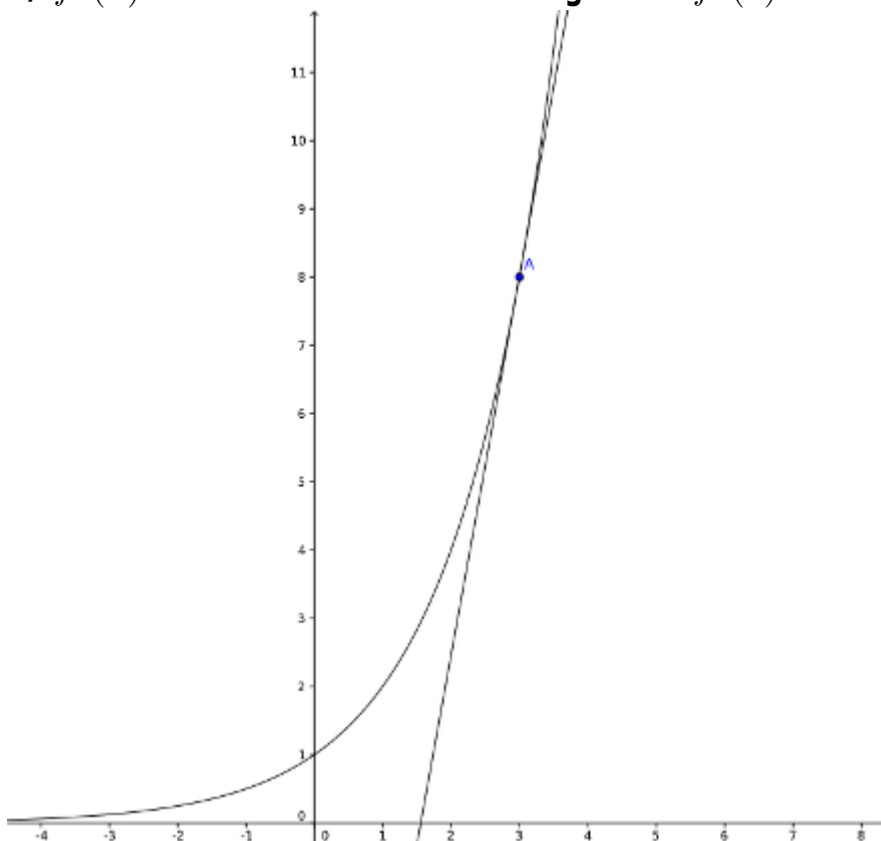
$$(a^x)' = a \cdot a^x$$

et donc $k = \ln a$. Par conséquent,

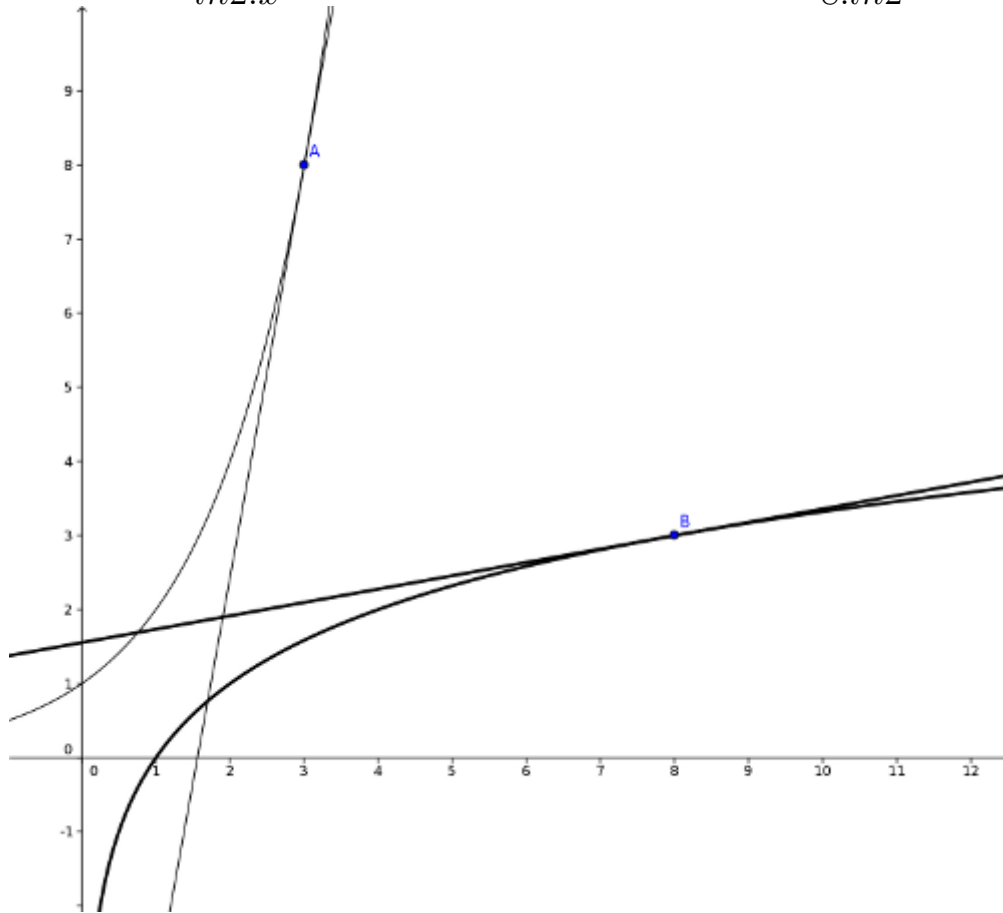
$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a \cdot x}$$

Réponse aux exercices

1. a) $f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x$ Pente de la tangente : $f'(3) = 8 \ln 2 \cong 5,55$



b) $g'(x) = \frac{1}{\ln 2 \cdot x}$ Pente de la tangente : $g'(8) = \frac{1}{8 \cdot \ln 2} \cong 0,11$



2. Dérivées

(a) $\left(3\ln x - \frac{2}{x}\right)' = 3 \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3x+2}{x^2}$

(b) $(\ln^3 x)' = 3 \cdot \ln^2 x \cdot (\ln x)' = \frac{3\ln^2 x}{x}$

(c) $(x \cdot \ln x)' = \ln x + 1$

(d) $\left(\frac{1}{\ln x}\right)' = -\frac{1}{x \cdot \ln^2 x}$

(e) $(\ln(1-4x^2))' = \frac{1}{1-4x^2} \cdot (1-4x^2)' = \frac{-8x}{1-4x^2}$

(f) $(3^{x^2-2})' = \ln 3 \cdot 3^{x^2-2} \cdot (x^2-2)' = 2 \ln 3 \cdot x \cdot 3^{x^2-2}$

(g) $(\log_2(3x^2 - \sin x))' = \frac{1}{\ln 2 \cdot (3x^2 - \sin x)} (3x^2 - \sin x)' = \frac{6x - \sin x}{\ln 2 \cdot (3x^2 - \sin x)}$

(h) $\left(\ln(4x^2 - 2x + 1)^3\right)' = \frac{1}{(4x^2 - 2x + 1)^3} 3(4x^2 - 2x + 1)^2 \cdot (4x^2 - 2x + 1)' = \frac{3(8x-2)}{(4x^2 - 2x + 1)}$

$$(i) \text{ (Ex 22) } \left(\frac{\ln(x) + 1}{x} \right)' = \frac{(\ln(x) + 1)' x - (\ln(x) + 1) x'}{x^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{x} x - (\ln(x) + 1)}{x^2} = \frac{-\ln(x)}{x^2}$$

3. (Ex 23) On considère la fonction f définie pour tout nombre réel non nul x par l'expression

$$f(x) = 2 + (x - 1)e^x + \frac{3}{2} \ln(x^2)$$

Donne une équation de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse $x = 1$.

Le point de contact est $(1; 2)$.

$$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x + \frac{3}{2} \frac{1}{x^2} 2x = xe^x + \frac{3}{x}$$

$$f'(1) = e + 3 = m.$$

$$t \equiv y = (e + 3)x + p \quad \text{où } 2 = (e + 3) \cdot 1 + p \Rightarrow p = -1 - e$$

Réponse : $y = (e + 3)x - e - 1$.

4. (Ex 24) Étant donné la fonction f définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = \ln(x^2 + 3)$$

on considère la fonction g définie par $g(x) = f(x - 1)$

Sur quelles parties de la droite réelle g est-elle strictement décroissante ?

$$g(x) = \ln((x - 1)^2 + 3) = \ln(x^2 - 2x + 1 + 3) = \ln(x^2 - 2x + 4)$$

$$b^2 - 4ac = 4 - 16 = -12 \Rightarrow x^2 - 2x + 4 > 0 \Rightarrow \text{dom} g = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 4} (x^2 - 2x + 4)' = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 4}$$

x		1	
$2x - 2$	-	0	+
$x^2 - 2x + 4$	+	+	+
$g'(x)$	-	0	+
g	$\searrow$		$\nearrow$

Réponse : $] -\infty, 1[$

NB : On peut aussi déterminer que f est décroissante sur $] -\infty, 0[$ puis procéder à une translation horizontale de 1 unité.

5. $125 = 100 \cdot x^4 \quad x = (1,25)^{\frac{1}{4}} \quad x = 1,0574$

Le taux d'intérêt annuel était de 5,74%.

2.5 Quelques applications particulières des logarithmes

Réponse aux exercices

1. $+3,7$

2. la diviser par 10000

3. $10^6 = 1000000$ environ 10^{14} environ

	x	CH	
	0,01	1	
4.	0,0001	2	$x = 10^{-2CH} \quad CH = -\frac{\log x}{2}$
	0,000001	3	
	10^{-10}	5	

Chapitre 3

Calcul intégral

3.1 Prérequis

A retenir

Opérations sur les fonctions

La fonction $f + g$ est définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, et de même pour $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

La fonction $g \circ f$ (g de f) est définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Dérivée des fonctions de référence

$(k)' = 0$
$(x)' = 1$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$
$(e^x)' = e^x$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Réponse aux exercices

Comparaison de fonctions

- Sur quel domaine peut-on dire que $f > g$?
- Sur quel domaine peut-on dire que $f \leq g$?
- Peux-tu comparer ces deux fonctions partout ?

1. $f : x \rightarrow -x^2 + 4x + 32$ et $g : x \rightarrow 25 - 2x$

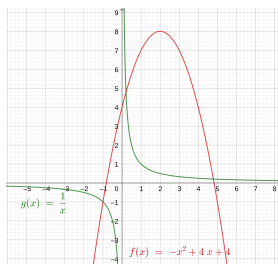
$$f(x) = g(x) \iff x = -1 \text{ ou } x = 7$$

Le graphique montre que $f > g$ sur $] -1; 7[$ et que $f \leq g$ sur $]\leftarrow; -1] \cup [7; \rightarrow[$.

Les deux fonctions peuvent être comparées partout.

2. $f : x \rightarrow -x^2 + 4x + 4$ et $g : x \rightarrow \frac{1}{x}$

$$f(x) = g(x) \iff (x+1)(-x^2 + 5x - 1) = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = \frac{5 \mp \sqrt{21}}{2}$$



Le graphique montre que $f > g$ sur $] -1; 0[\cup \left] \frac{5 - \sqrt{21}}{2}; \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right[$
 et que $f \leq g$ sur $] -\infty; -1] \cup \left] 0; \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \right] \cup \left] \frac{5 + \sqrt{21}}{2}; +\infty \right[$.

Les deux fonctions ne peuvent être comparées en $x = 0$.

3. Sur quel domaine est-ce que $f > g$ et sur quel domaine est-ce que $f \leq g$?

- (a) $f > g$ dans $] -\infty; -2[\cup] 1; +\infty[$ $f \leq g$ dans $[-2; 1]$
- (b) $f > g$ dans $] -\infty; -1[\cup] 0; 1[$ $f \leq g$ dans $[-1; 0[\cup] 1; +\infty[$
- (c) $f > g$ dans $] 0; 1[$ $f \leq g$ dans $] -\infty; 0[\cup] 1; +\infty[$
- (d) $f > g$ dans $] -\infty; \frac{1 - \sqrt{17}}{2} [\cup \left] \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; +\infty \right[$ $f \leq g$ dans $\left[\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right]$

Dérivées

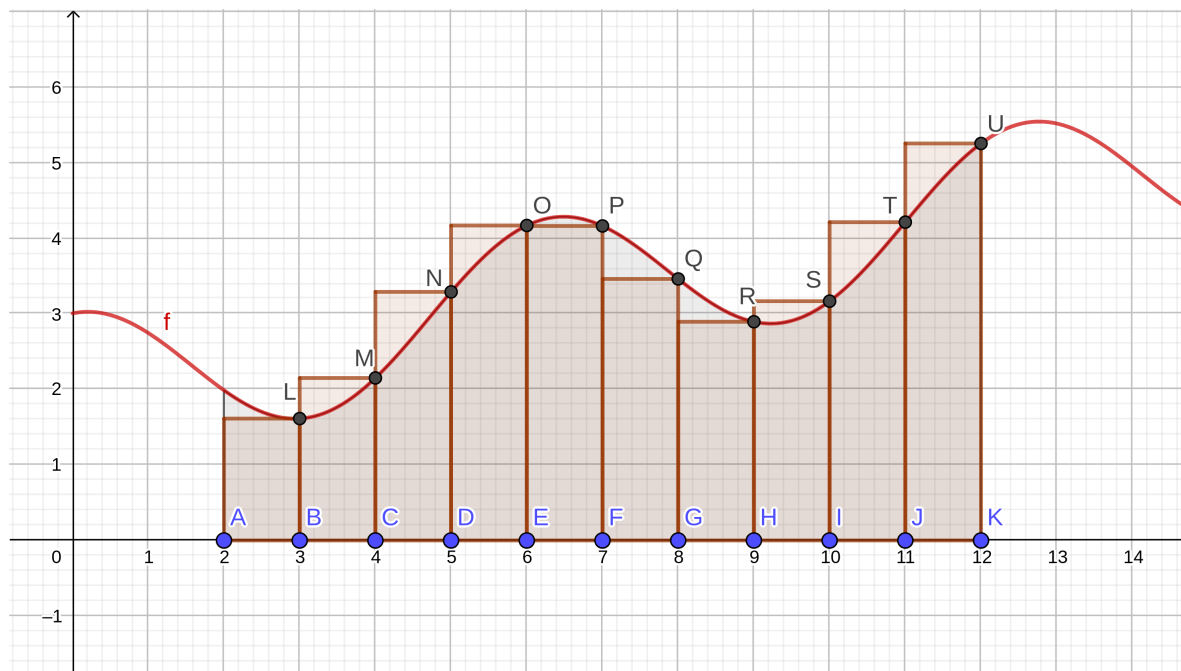
4. Calcule les dérivées suivantes :

- (a) $(x^2 + \sqrt{x})' = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- (b) $\left(3x^2 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)' = 6x - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$
- (c) $(\ln(x) + 2^x)' = \frac{1}{x} + \ln 2 \cdot 2^x$
- (d) $(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3 \cdot \cos 3x$
- (e) $\left(\frac{1}{4x}\right)' = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{4x^2}$
- (f) $(\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- (g) $(x^2 - 3x + 7)' = 2x - 3$
- (h) $\left(7x^3 - 7x + 3 + \frac{1}{x}\right)' = 21x^2 - 7 - \frac{1}{x^2}$

3.2 Calcul numérique d'une intégrale

A retenir

Il est souvent possible de calculer l'aire comprise entre une fonction positive et l'axe Ox à l'aide de rectangles.



Dans cet exemple, l'aire comprise sous la fonction f est calculée entre $x = 2$ et $x = 12$ à l'aide de 10 rectangles.

La réponse est approximative.

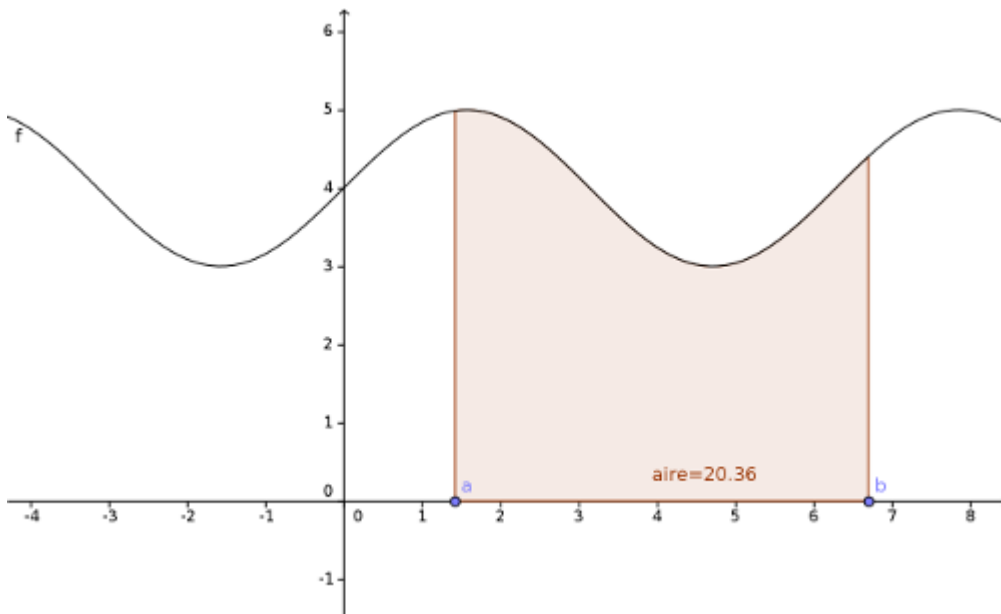
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = +\infty$$

3.3 Intégrale d'une fonction continue dans l'intervalle $[a; b]$

A retenir

Théorème

Considérons f , fonction continue et positive dans $[a; b]$.



L'aire délimitée par l'axe X, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et le graphe de la fonction f peut être obtenue par $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$.

Ce nombre est noté $\int_a^b f(x) dx$

(intégrale de a à b de f)

Ce résultat est admis.

Remarques

1. Dans l'exercice précédent, nous avons calculé $\int_0^1 \sin x dx$.
2. Le nombre $\int_a^b f(x) dx$ ne dépend que de f , a et b .
3. $[a; b]$ est appelé intervalle d'intégration. a et b sont les bornes d'intégration.
4. Par convention, $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.
5. $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$ (si le premier membre a un sens)
6. Si $f < 0$ dans $[a; b]$, l'aire délimitée par l'axe X, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et le graphe de la fonction f est donnée par $-\int_a^b f(x) dx$.

3.4 Primitive d'une fonction

A retenir

Définition

Une primitive de la fonction f est une fonction F dont la dérivée est f .

F est une primitive de $f \iff F' = f$.

Propriété

Si une fonction admet une primitive (sur un intervalle ouvert), alors elle en admet une infinité et deux primitives de cette fonction diffèrent par une constante.

Théorème d'existence d'une primitive

Si f est une fonction continue sur $]a; b[$, alors

pour x_0 fixé dans $]a; b[$,

une primitive de f est donnée par
$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

Résultat admis

Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive ou formule de Leibniz-Newton

Si F est une primitive de f (continue sur $[a; b]$),

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Notation

Vu son lien avec les intégrales, toute primitive de f sera notée $\int f(x) dx$.

Attention

$\int f(x) dx$ est une fonction associée à f .

primitive de $f(x) dx$

$\int_a^b f(x) dx$ est un nombre associé à f , a et b .

intégrale de a à b de f

3.5 Primitives immédiates

A retenir

Primitives
$\int 1 \, dx = x + k$
$\int x^p \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + k \text{ si } p \neq -1$
$\int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} + k$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2\sqrt{x} + k$
$\int \cos x \, dx = \sin x + k$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + k$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + k$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \sin^{-1} x + k$
$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \tan^{-1} x + k$
$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + k$
$\int e^x \, dx = e^x + k$
$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + k$

Réponse aux exercices

- 1) $\frac{x^{17}}{17} + k$ 4) $\frac{x^4}{2} - 7\frac{x^2}{2} + 4x + k$ 7) $\sqrt{x} - \tan x + k$
 1. 2) $8x + k$ 5) $\sin x - \cos x + k$ 8) $-\frac{2}{3^x} - \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^8} + k$
 3) $-\frac{3}{2x^2} + k$ 6) $\frac{8}{3} \ln |x| + k$ 9) $\frac{4^x}{\ln 4} + e^x + k$

2. Le lecteur ajoutera la constante k si nécessaire.

$$\begin{array}{lll}
 1) -\frac{1}{x} & 4) 5 \sin x & 7) \frac{x^4}{2} - 7\frac{x^3}{3} + 5x \\
 2) \frac{2}{3}\sqrt{x^3} & 5) \frac{3}{\ln 8} \cdot 8^x & 8) \int -2x^2 + 9x - 9 dx = -2\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2} - 9x \\
 3) 4\sqrt[4]{x} & 6) -12x & 9) \int 1 + \frac{1}{x^2} dx = x - \frac{1}{x} \\
 & & 10) \ln x + 4\sqrt{x} + x
 \end{array}$$

3. (Ex 25) On considère la fonction f définie pour tout nombre réel $x \neq 0$ vérifiant :

$$f(1) = 1$$

et dont la dérivée vaut :

$$f'(x) = x^3 - \frac{3}{x^4}$$

Que vaut $f(2)$?

$$f'(x) = x^3 - 3x^{-4} \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^{-3}}{-3} + k = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{x^3} + k$$

$$f(1) = \frac{1}{4} + 1 + k = 1 \Rightarrow k = -\frac{1}{4} \quad f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{4}$$

$$f(2) = \frac{16}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \quad \text{Réponse : } \frac{31}{8}.$$

4. Tu obtiens $\frac{344}{5}$ à l'aide de la primitive.

5. Tu obtiens 0,459698.

6. $\int_0^4 E(x) dx = 6$ Fais le graphique si tu as un doute.

3.6 Primitivation par substitution

Réponse aux exercices

$$\begin{array}{lll}
 1) \frac{(x^3 - 1)^8}{8} & 7) \ln |x^2 - 3x + 4| & 13) \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x^2 + 6x)^2} \\
 2) -\frac{1}{2(x^3 - 1)^2} & 8) 2\sqrt{x^2 - 3x + 4} & 14) \frac{1}{2} \tan(4x) \\
 3) \sin(5x^2) & 9) \frac{1}{5} e^{5x} & 15) -\frac{1}{4} \cos(4x) \\
 4) \tan(x^2 - 1) & 10) \frac{1}{12} (2x^2 - 4x - 3)^3 & 16) \frac{1}{4} e^{4x-3} \\
 5) e^{4x-3} & 11) -\frac{1}{6(3x^2 + 4)} & 17) -\ln |1 - x| \\
 6) \ln |x^2 - 5x + 3| & 12) \frac{2}{9} \sqrt{(x^3 + 5)^3} & 18) -\frac{1}{e^x} + 9x
 \end{array}$$

3.7 Primitivation par parties

A retenir

Primitivation par parties

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

Réponse aux exercices

1. $x \cdot \sin x + \cos x$

2. $-x^2 \cos x - \int 2x (-\cos x) dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx$ deuxième primitivation par parties :
 $= -x^2 \cos x + (2x \sin x - \int 2 \sin x dx) = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$

3. $\frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$

4. $x^2 e^x - 2x \cdot e^x + 2 \cdot e^x$

5. $\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4}$

6. $-\frac{x}{3} \cos(3x) + \frac{1}{3} \int \cos(3x) dx = -\frac{x}{3} \cos(3x) + \frac{1}{9} \sin(3x)$

7. $\frac{2}{3} x^2 \sin(3x) - \frac{4}{3} \int x \cdot \sin(3x) dx = \frac{2}{3} x^2 \sin(3x) - \frac{4}{3} \left(-\frac{x}{3} \cos(3x) + \frac{1}{3} \int \cos(3x) dx \right)$
 $= \frac{2}{3} x^2 \sin(3x) + \frac{4x}{9} \cos(3x) - \frac{4}{27} \sin(3x)$

8. $(x^2 - 3x) \ln x - \int \frac{1}{x} (x^2 - 3x) dx = (x^2 - 3x) \ln x - \int x - 3 dx = (x^2 - 3x) \ln x - \frac{x^2}{2} + 3x$

9. Le produit est effectuable ! $\int x \cdot (x^3 + 1) dx = \int x^4 + x dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2}$

10. $x \cdot \ln x - x$ en posant $\begin{cases} f(x) = \ln x \\ g'(x) = 1 \end{cases}$

11. $4x^4 \cdot \ln x - x^4$ en posant $\begin{cases} f(x) = \ln x \\ g'(x) = 16x^3 \end{cases}$

3.8 Exercice récapitulatif

Réponse aux exercices

$$\begin{array}{ll}
 1) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} & 5) \int \frac{5}{6-x} dx = -5 \ln |6-x| \\
 2) \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x & 6) \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x \\
 1. \quad 3) \int \frac{7}{5\sqrt{x}} - 4^{2x-3} dx = \frac{14}{5} \sqrt{x} - \frac{4^{2x-3}}{2 \ln 4} & 7) \int (6x-5) e^{3x^2-5x+2} dx = e^{3x^2-5x+2} \\
 4) \int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x & 8) \int (x^2 - 2x) \ln x dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \ln x - \frac{x^3}{9} \\
 9) \int \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx = \ln |x^2+x+3| & \\
 10) \int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} & \\
 11) \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = e^{\tan x} & \\
 12) \int \frac{e^x}{e^x+2} dx = \ln |e^x+2| &
 \end{array}$$

2. (Ex 24) Que vaut $\int e^{-2 \ln(x)} \ln(x) dx$ à une constante additive près ?

L'expression se simplifie en $\int \frac{1}{(e^{\ln(x)})^2} \ln(x) dx = \int \frac{1}{x^2} \ln(x) dx$.

Elle peut se calculer par parties $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \ln x \\ g'(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{x} \\ g(x) = -\frac{1}{x} \end{array} \right.$.

$$\int \frac{1}{x^2} \ln(x) dx = -\frac{1}{x} \ln(x) - \int -\frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}.$$

3.9 Calcul d'intégrales à l'aide de primitives

A retenir

Formule de Leibniz-Newton (rappel)

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)} \text{ où } F \text{ est une primitive de } f \text{ (fonction continue...)}.$$

Réponse aux exercices

Dans les corrigés, $F(b) - F(a)$ sera souvent noté $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$.

$$\begin{array}{lll}
 1) \int 2x^3 - x + 1 dx = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + x & 4) \int x\sqrt{x^2+4} dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+4)^3} & 7) \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4x + 3| \\
 2) \int (1-x)^2 dx = x - x^2 + \frac{x^3}{3} & 5) \int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \frac{\sin^3 x}{3} & 8) -\frac{1}{2(x^2 - 4x + 3)} \\
 3) \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} & 6) \int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{\ln^3 x}{3} & 9) \frac{3}{14} \sqrt[3]{(7x^2+1)^2} t = 7x^2 +
 \end{array}$$

Réponses

$$\begin{array}{lll}
 1) 2 & 4) \frac{40}{3}\sqrt{5} - \frac{16}{3}\sqrt{2} & 7) \frac{1}{2} \ln 8 - \frac{1}{2} \ln 15 \\
 2) \frac{1}{3} & 5) \frac{3\sqrt{3}}{24} - \frac{2\sqrt{2}}{24} & 8) -\frac{1}{16} + \frac{1}{30} = -\frac{7}{240} \\
 3) \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} & 6) \frac{1}{3} & 9) \frac{45}{14}
 \end{array}$$

Chapitre 4

Géométrie et Algèbre

4.0 Prérequis

A retenir

- Une équation est une égalité qui est vraie ou fausse.

Exemple : $3x - 4y = 7$ est vraie pour $x = 1$ et $y = -1$, noté $(1; -1)$

et fausse pour pour $x = 1$ et $y = 2$, noté $(1; 2)$.

- Résoudre un système de deux équations, c'est déterminer les couples $(x; y)$ tels que les deux équations soient vraies (solutions communes).

Exemple : $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ x + y = 0 \end{cases}$ a comme solution $(1; -1)$.

- La méthode des combinaisons consiste à remplacer une des deux équations du système par une somme de multiples (non nuls) des deux équations.

On obtient alors un système qui a les mêmes solutions que le système de départ.

Réponse aux exercices

1. Résous les systèmes suivants par la méthode de ton choix.

(a) $(-1; 2)$

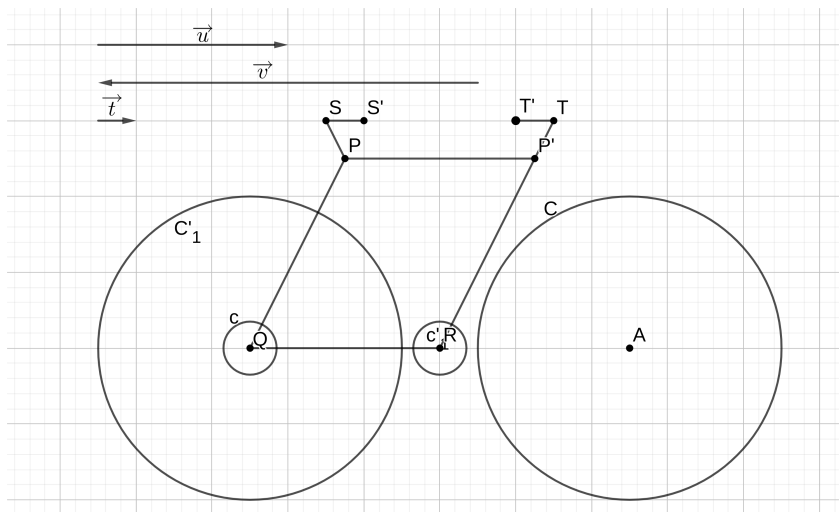
(b) Pas de solution

(c) $\left(\frac{24}{7}; \frac{44}{7}\right)$

(d) Pas de solution

(e) $\left(-\frac{11}{8}; -\frac{5}{4}\right)$

2. Construis les figures demandées.



4.1 Points et vecteurs

A retenir

Définition

Deux points A et B du plan, pris dans cet ordre, définissent un vecteur que l'on note $\overrightarrow{AB}$.

La notion de vecteur est identique à la notion de **translation** ou de **déplacement** de A en B .

En abrégé, on désignera un vecteur par la notation $\vec{v}$.

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$$

Composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Si, dans un repère, les coordonnées du point A sont $(x_A; y_A; z_A)$ et celles du point B $(x_B; y_B; z_B)$,

les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont les nombres qu'il faut ajouter aux coordonnées de A pour obtenir les coordonnées de B .

Autrement dit, les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

Caractéristiques d'un vecteur

Le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- sa **direction** : celle de la droite AB
- son **sens** : de A vers B
- sa **norme** : la distance entre A et B , notée $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Remarques

- En physique, on définit une quatrième caractéristique, appelée point d'application, précisant la position de l'origine du vecteur. En mathématiques, en général on ne fixe pas l'origine, on parle alors de vecteur libre ; si par contre on choisit une origine particulière, on parle de vecteur lié.
- Le vecteur nul n'a ni direction, ni sens et sa norme vaut 0.
- Le vecteur nul a comme composantes $(0; 0)$.

Norme d'un vecteur

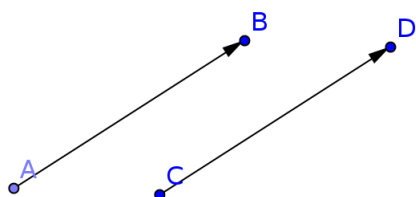
Définition : La norme d'un vecteur est la distance entre son origine et son extrémité.

La norme du vecteur $\overrightarrow{v}$ se calcule par $\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}$

La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se calcule par $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Vecteurs égaux

- Définition algébrique : Deux vecteurs qui ont les mêmes composantes sont égaux.
- Définition géométrique : Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils sont nuls tous les deux ou s'ils ont même direction
même sens
et même norme.
On écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Réponse aux exercices

$$1. D(0; 0; 3) \quad E(0; 3; 3) \quad F(2; 0; \frac{3}{2}) \quad G(1; 5; \frac{3}{2})$$

$$2. A(2; 0; 3) \quad B(2; 5; 3) \quad C'(0; 5; 0)$$

$$\text{Réponses : } |AB| = 5 \quad |BC'| = \sqrt{13} \quad |C'A| = \sqrt{38}$$

$$3. \overrightarrow{DG}(1; 5; -\frac{3}{2}) \quad \overrightarrow{EF}(2; -3; -\frac{3}{2})$$

$$4. \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BD} = 6 \quad \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BD} = -6 \text{ et } \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BA} = 0$$

$$5. \overrightarrow{t} \cdot \overrightarrow{u} = 1 \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u} = -\frac{9}{2}$$

$$6. \text{ Calcule } \overrightarrow{t} \cdot \overrightarrow{v}$$

$$(a) \overrightarrow{t} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{5}{2}$$

$$(b) \overrightarrow{t} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

$$(c) \overrightarrow{t} \cdot \overrightarrow{v} = -6\sqrt{3}$$

$$7. (\text{Ex 21}) \text{ Dans un repère orthonormé du plan, } A(0; 3) \ B(3; 6) \text{ et } C(4; 4).$$

Que vaut $\cos \widehat{ABC}$?

$$\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \|\overrightarrow{BC}\| \cos \widehat{ABC} \text{ où}$$

$$\overrightarrow{BA}(-3; -3) \quad \|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{18}$$

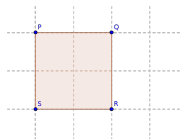
$$\overrightarrow{BC}(1; -2) \quad \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{5} \quad \text{En remplaçant dans la formule,}$$

$$3 = \sqrt{18}\sqrt{5} \cos \widehat{ABC}$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{3}{3\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$8. (\text{Ex 25}) \text{ Dans le plan euclidien, on considère quatre points P, Q, R, S qui forment un carré PQRS de côtés de longueur 2.}$$

Que vaut le produit scalaire $\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{RP}$?



$$\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QP} = \|\overrightarrow{PQ}\| \|\overrightarrow{QP}\| \cos 180^\circ = 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -4.$$

$$9. \overrightarrow{AB}(0; 5; 0) \quad \overrightarrow{AC'}(-2; 5; -3) \quad \overrightarrow{BC'}(-2; 0; -3)$$

$$(a) \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC'} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC'}\| \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow 25 = 5 \cdot \sqrt{38} \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = 35,8^\circ$$

- (b) $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC'} = \|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC'}\| \cdot \cos \hat{B} \Rightarrow 0 = \cos \hat{B} \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$
 $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC'}$ sont orthogonaux. ABC' est un triangle rectangle en B .
- (c) $\overrightarrow{C'A} \bullet \overrightarrow{C'B} = \|\overrightarrow{C'A}\| \cdot \|\overrightarrow{C'B}\| \cdot \cos \hat{C'} \Rightarrow 13 = \sqrt{38} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = 54,2^\circ$
 La somme des angles fait bien 180° .

10. Calcule les composantes

- (a) $\overrightarrow{OB} \left(5; -\frac{5}{2}; \frac{15}{2} \right)$
 (b) $\overrightarrow{OC} \left(-\frac{28}{15}; \frac{14}{15}; -\frac{14}{5} \right)$

11. Combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$

- (a) $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{OI}$
 (b) $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{OJ}$
 (c) $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{OI}$
 (d) $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{OI}$
 (e) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$
 (f) $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OJ}$
 (g) $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}$
 (h) $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$

12. Combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$

- (a) $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$
 (b) $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}$
 (c) $\overrightarrow{EH} = 3\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OJ}$
 (d) $\overrightarrow{JN} = 2\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$

13. Solution : Commence par exprimer $\overrightarrow{AR}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AC}$.

Avec $\overrightarrow{AB}$, cela donne

$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BR} \text{ (relation de Châles)}$$

Maintenant, c'est $\overrightarrow{BR}$ qu'il faut exprimer en combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{BR} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \text{ (par hypothèse), donc}$$

$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Finalement, } \overrightarrow{AR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Essaye au départ de $\overrightarrow{AC}$.

4.2 Systèmes linéaires d'équations à trois inconnues

Un tel système admet 0, 1 ou une infinité de solutions. Je privilégie la méthode des combinaisons.

Exercices

1. Résoudre

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ x - 4y = -2 \\ x + y + 2z = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ -2 \\ \blacktriangleright \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 9y = 9 \\ x - 4y = -2 \\ x + y + 2z = 1 \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ x - 4 = -2 \\ x + 1 + 2z = 1 \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ x = 2 \\ 3 + 2z = 1 \end{array} \right.$$

Solution : $(x, y, z) = (2, 1, -1)$

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x - 4z = -11 \\ x + y + 2z = 6 \end{array} \right| \begin{array}{l} \blacktriangleright \\ 1 \\ 2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \\ x + y + 2z = 6 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ -1 \\ \blacktriangleright \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x = 1 \\ x + y + 2z = 6 \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{l} 2 + y = 1 \\ x = 1 \\ 1 + y + 2z = 6 \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{l} y = -1 \\ x = 1 \\ 1 - 1 + 2z = 6 \end{array} \right.$$

Solution : $(x, y, z) = (1, -1, 3)$

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z = -3 \\ x - y - 4z = -20 \\ x + y + 2z = 10 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ \blacktriangleright \\ 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 5x + 3y = 4 \\ x - y - 4z = -20 \\ x + y + 2z = 10 \end{array} \right| \begin{array}{l} \blacktriangleright \\ 1 \\ 2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 5x + 3y = 4 \\ 3x + y = 0 \\ x + y + 2z = 10 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ -3 \\ \blacktriangleright \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -4x = 4 \\ 3x + y = 0 \\ x + y + 2z = 10 \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ -3 + y = 0 \\ -1 + y + 2z = 10 \end{array} \right.$$

Solution : $(x, y, z) = (-1, 3, 4)$

2. (Ex 22) Un étudiant a présenté successivement trois examens. Si au quatrième examen il obtient une note égale à celle du premier examen, sa moyenne (des quatre examens) vaudra 10 ;

si à ce quatrième examen, il obtient une note égale à celle du deuxième examen, sa moyenne vaudra 12 et enfin

s'il obtient une note égale à celle du troisième examen à ce quatrième examen, sa moyenne vaudra 14.

Quelles ont été, dans l'ordre chronologique, les notes des trois premiers examens ?

Inconnues : x note du premier examen, y note du deuxième examen, z note du troisième

$$\frac{x + y + z + x}{4} = 10 \quad \frac{x + y + z + y}{4} = 12 \quad \frac{x + y + z + z}{4} = 14$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 40 \\ x + 2y + z = 48 \\ x + y + 2z = 56 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ \blacktriangleright \\ -1 \end{array} \left| \begin{array}{l} 3x + y = 24 \\ x + 2y + z = 48 \\ x + y + 2z = 56 \end{array} \right| \begin{array}{l} \blacktriangleright \\ 2 \\ -1 \end{array} \left| \begin{array}{l} 3x + y = 24 \\ x + 3y = 40 \\ x + y + 2z = 56 \end{array} \right| \begin{array}{l} 3 \\ -1 \\ \blacktriangleright \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 8x = 32 \\ 4 + 3y = 40 \\ 4 + y + 2z = 56 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ 3y = 36 \\ 12 + 2z = 52 \end{array} \right. \quad \text{Solution : 4, 12 et 20}$$

3. (Ex 22) Un couple se lance dans l'élevage de chiens et planifie le volet financier relatif à cette activité.

Chaque année, une somme F rassemble les frais fixes incompressibles (bâtiment, chauffage, eau, électricité). Un autre poste de dépense est consacré aux frais de nourriture et de vétérinaire. Les frais annuels de nourriture sont estimés à un montant B par chien adulte et à douze euros par chiot. Les frais vétérinaires sont évalués annuellement à un montant V par adulte, le suivi des chiots étant comptabilisé dans le suivi de la mère.

Sachant que le prix de vente d'un chiot est de 1200 euros, que l'élevage comprend N_a femelles adultes et N_y chiots, que tous les chiots sont vendus à la fin de l'année, laquelle de ces quatre formules mathématiques décrit correctement le bénéfice annuel du plan comptable de cet élevage ?

- (a) $(1200 - 12) N_y - N_a (F + N_a V + B)$
- (b) $(1200 - 12) N_y - (F + N_a (V + B))$
- (c) $(1200 - 12) N_y - (F + N_a V + B)$
- (d) $(1200 - 12) N_y - (F + V + B) N_a$

Le premier terme est identique dans les 4 propositions. Dans le second, F ne dépend pas de N_a ce qui élimine la première et la dernière possibilité.

Il reste à savoir si V et B dépendent tous les deux de N_a ce qui est le cas.

Réponse (b)

4. (Ex 23) Le patron d'une jardinerie a trois types de fertilisant pour le gazon : F_1 , F_2 et F_3

contenant respectivement 30%, 20% et 10% d'azote.

Il projette de les mélanger pour obtenir 500 kg de fertilisant contenant 15% d'azote et souhaite que ce mélange contienne trois fois moins de fertilisant de type F_1 que de type F_2 .

Si on note p_1, p_2, p_3 les masses respectives en kilogrammes de F_1, F_2 et F_3 intervenant dans ce mélange, que vaut $(p_1; p_2; p_3)$?

Inconnues : p_1, p_2, p_3 les masses respectives en kilogrammes de F_1, F_2 et F_3 .

Il y a 75 kg d'azote dans le mélange obtenu donc

$$0,3p_1 + 0,2p_2 + 0,1p_3 = 75.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,3p_1 + 0,2p_2 + 0,1p_3 = 75 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 500 \\ 3p_1 = p_2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 3p_1 + 2p_2 + p_3 = 750 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 500 \\ 3p_1 - p_2 = 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ \blacktriangleright \end{array} \right|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2p_1 + p_2 = 250 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 500 \\ 3p_1 - p_2 = 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} 1 \\ \blacktriangleright \\ 1 \end{array} \right| \quad \left\{ \begin{array}{l} 5p_1 = 250 \\ 50 + p_2 + p_3 = 500 \\ 150 - p_2 = 0 \end{array} \right.$$

Réponse : $(p_1; p_2; p_3) = (50; 150; 300)$

5. (Ex 25) Le prix d'entrée pour une pièce de théâtre était de 10 euros pour les étudiants, 15 euros pour les seniors et 20 euros pour toutes les autres personnes.

On sait que parmi les 500 billets qui ont été vendus, pour un total de 6500 euros, il y avait trois fois plus de billets au tarif étudiant que de billets au tarif senior.

Quel est, en euros, le montant obtenu par la vente des billets au tarif étudiant ?

Choix des inconnues : x nombre de billets vendus au tarif étudiant, y nombre de billets vendus au tarif senior, z au tarif autre.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 500 \\ 10x + 15y + 20z = 6500 \\ 3y = x \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} 20 \\ -1 \\ \blacktriangleright \end{array} \right| \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 500 \\ 10x + 5y = 3500 \\ x - 3y = 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \blacktriangleright \\ 1 \\ -10 \end{array} \right|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 500 \\ 35y = 3500 \\ x - 3y = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 300 + 100 + z = 500 \\ y = 100 \\ x = 300 \end{array} \right.$$

Réponse : $300 \cdot 10 = 3000$.

partie VII

Annexes

Chapitre 1

Utilisation du cahier à spirale

Le cahier à spirale est un outil fantastique.

Il permet de conserver, pendant toute l'année, tout l'apprentissage en mathématiques (ou dans d'autres disciplines).

Son utilisation est fort simple.

Conservez les premières pages pour une table des matières.

Numérotez toutes les pages. Ceci peut être fait au fur et à mesure.

Prenez note en classe sur les pages de droite (de gauche pour les gauchers).

Faites tout le travail à domicile sur les pages de gauche : préparations, synthèses, aide fournie par un condisciple ou un professeur, travaux supplémentaires,

L'utilisation puis la création personnelle de schémas heuristiques (arbres) sur ces pages est un atout de réussite !

Chapitre 2

Exemples de synthèses



Les synthèses sont données sous forme d'arbres (schémas heuristiques).

Pourquoi ?

Parce que notre cerveau est organisé en réseau.

Exemple en trigonométrie

Résolution d'un triangle rectangle



Quelques remarques

Une synthèse ne contient pas tout. J'ai choisi de ne pas y mettre certaines informations.

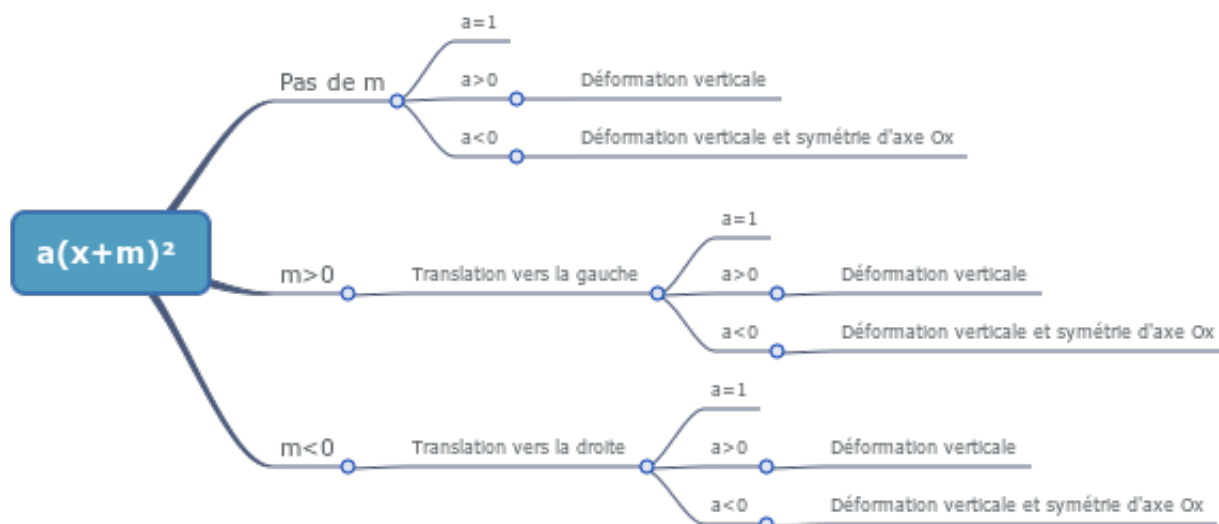
Le plus important est que cette synthèse soit utile. La meilleure synthèse est celle que tu fais toi-même.

Pour réaliser une telle synthèse, il y a très peu de règles à respecter.

- Choisis le sujet (théorie ou exercice) qui t'intéresse.
- Commence par le plus important.
- Couvre tous les cas.

Exemple en fonctions de référence

Il s'agit de trouver les transformations qui permettent d'obtenir $a \cdot (x + m)^2$ au départ de x^2 .



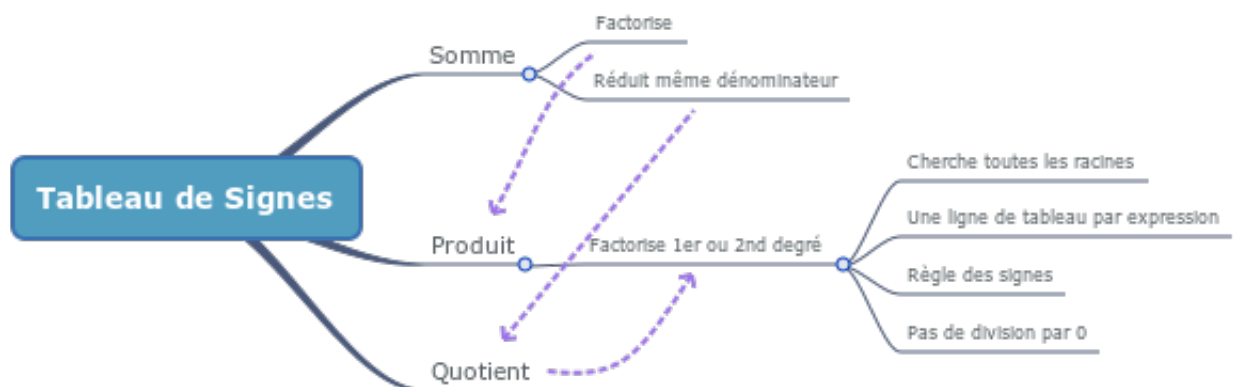
Exemple de la résolution de systèmes

Il s'agit de résoudre un système de deux équations à deux inconnues. La méthode des combinaisons est privilégiée.



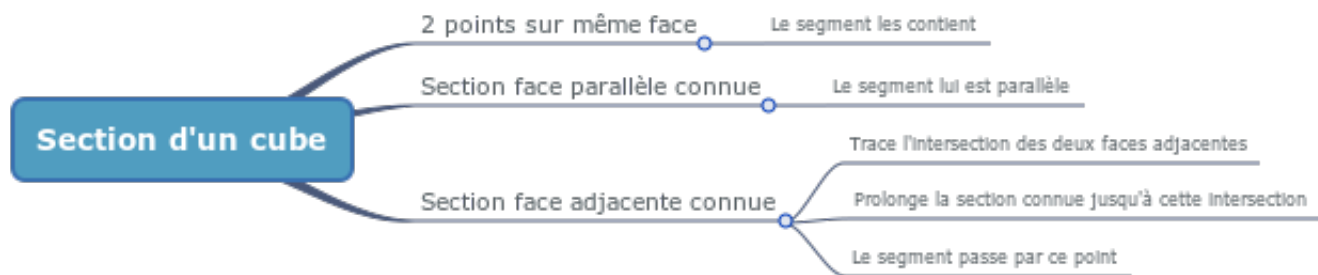
C'est un bel exemple de 3D. Après l'étape « Combiner pour ne garder qu'une inconnue » on continue sur une branche déjà connue.

Exemple du tableau de signes



Il y a des questions à se poser avant de tracer le tableau!

Exemple de la section plane d'un cube



Transmettre fraternellement ce que j'ai demandé avec foi et obtenu avec gratitude.